CONSTANTIN AMARIEI
MIHAI BUDESCU
MIHAELA-ANCA CIUPALA

# STATICA CONSTRUCTIILOR
# STRUCTURAL ANALYSIS

CONSTANTIN AMARIEI
MIHAI BUDESCU
MIHAELA-ANCA CIUPALA

# STATICA CONSTRUCTIILOR
# STRUCTURAL ANALYSIS

Editura Societatii Academice „Matei-Teiu Botez" IASI

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**
**AMARIEI, CONSTANTIN**
**Statica construcțiilor = Structural analysis** / C. Amariei, M.
Budescu, M. A. Ciupală. - Iaşi : Editura Societății Academice "Matei-Teiu Botez", 2003
Bibliogr.
ISBN 973-7962-29-X

I. Budescu, Mihai
II. Ciupală, Mihaela-Anca

# PREFAȚĂ

Lucrarea, redactată în sistem bilingv (romană – engleză), cuprinde atât aspectele teoretice şi metodele de bază cât şi aplicații privind calculul de rezistență şi de rigiditate al principalelor tipuri de structuri static determinate (grinzi, cadre, arce, structuri cu zăbrele) supuse la încărcări fixe şi la încărcări mobile şi la alte acțiuni.

Lucrarea este structurată pe cinci capitole şi se adresează studenților de la secțiile cu predare în limba română şi în limba engleză.

Autorii mulțumesc prof. dr. ing. Ioan Ciongradi şi prof. dr. ing. Adrian Vulpe pentru recenzarea lucrării şi pentru sugestiile făcute cu acest prilej.

***Autorii***

# 1

# PROBLEME GENERALE

# GENERAL PRINCIPLES

Statica construcțiilor este o disciplină importantă a **Mecanicii solidului deformabil** şi face parte din **Mecanica construcțiilor**.

Alte discipline ale Mecanicii construcțiilor: Mecanica teoretică, Rezistența materialelor, Dinamica construcțiilor, Stabilitatea construcțiilor, Ingineria seismică, Mecanica pământurilor, Teoria elasticității şi plasticității, Calculul postelastic al structurilor, Calculul automat al structurilor, Incercarea construcțiilor.

**Obiectul Staticii construcțiilor este studiul principiilor şi metodelor de analiză pentru structurile de rezistență supuse la acțiuni statice în vederea stabilirii următoarelor două grupe de elemente necesare cerințelor de siguranță şi eficiență ale construcțiilor:**

- **eforturile** necesare pentru stabilirea dimensiunilor secțiunilor transversale (calculul de rezistență al structurilor);
- **deplasările** structurii, pentru ca aceste deplasări să rămână în limitele admisibile (calculul de rigiditate al structurii).

Statics is an important discipline of the **Deformable-Solid Mechanics** and forms part of the **Structural Mechanics**.

Other disciplines of Structural Mechanics are: Theoretical Mechanics, Strength of Materials, Structural Dynamics, Structural Stability, Earthquake Engineering, Soil Mechanics, Theory of Elasticity and Plasticity, Postelastic Analysis of Structures, Computer Aided Design, Testing of Structures.

**The object of Statics is the study of principles and methods of analysis of structures subjected to loads in order to determine the following two groups of information required for the safety and efficiency of structures:**

- **internal forces** required to determine the dimensions of the cross sections (ultimate limit state);
- **displacements** of the structure, in order to be maintained within the permissible limits (serviceability limit state).

## 1.1 IPOTEZELE STATICII CONSTRUCTIILOR

Pentru a construi o teorie a Staticii construcțiilor, se consideră următoarele ipoteze:

- **continuitatea materialului** - se presupune că materialul umple întreg volumul pe care îl ocupă;
- **omogeneitatea** - se presupune că proprietățile materialului sunt identice în toate punctele;
- **izotropia** - se presupune că proprietățile materialului sunt identice în toate direcțiile;
- **elasticitatea perfectă a materialului** - comportarea materialului este perfect liniară - **legea lui Hooke**;
- **deformații mici** - se presupune că deformațiile sunt mici în raport cu dimensiunile elementelor deformate, astfel încât ecuațiile de echilibru se scriu ca pentru un element nedeformat;
- deformarea structurii se produce instantaneu şi nu variază în timp;
- **dependența liniară între deplasări şi încărcări** - se presupune că există o dependență direct proporțională între deformații şi acțiuni;
- **secțiuni plane** - se presupune că secțiunile plane imaginare realizate perpendicular pe axa barei rămân plane şi perpendiculare pe bară în timpul deformării (**ipoteza lui Bernoulli).**

**Observație:** Ipotezele deformațiilor mici, a elasticității perfecte a materialului şi a dependenței liniare între deplasări şi acțiuni permit considerarea valabilității principiului suprapunerii efectelor.

## 1.1 ASSUMPTIONS OF STATICS

In order to develop the theory of Statics, the following assumptions are made:

- **material continuity** - it is assumed that the material fills the whole occupied volume ;
- **homogeneity** - it is assumed that the material properties are the same at all points;
- **isotropy** - it is assumed that the material properties are the same in all directions;
- **perfect elasticity of material** - the material has a perfectly linear behaviour - **Hooke's law**;
- **small deformations** - it is assumed that the deformations are small compared to the dimensions of the deformed members, thus the equilibrium equations are written for an undeformed member;
- deformation of the structure takes place instantenuously and does not vary with time;
- **linear relationship between displacements and loads** - it is assumed that there is a direct proportional relationship between deformations and loads;
- **plane sections** - it is assumed that the imaginary plane sections considered perpendicular to the axis of the member remain plane and perpendicular to the member during deformation (**Bernoulli's assumption).**

**Note:** The principle of the superposition of effects is valid if the assumptions of small deformations, perfect elasticity of the material and linear relationship between displacements and loads are considered.

## 1.2 STRUCTURI DE REZISTENTA PENTRU CONSTRUCTII

Structura de rezistență este un ansamblu de **elemente de construcții**, cuplate între ele prin **legături interioare** rigide sau articulații şi fixat la teren sau pe un alt suport prin reazeme (**legături exterioare)**.

Se vor reaminti în continuare unele cunoştințe privind elementele de construcții şi reazemele (aceste probleme au fost tratate la disciplina Rezistența materialelor).

### 1.2.1 Elemente de construcții

Părțile componente ale unei structuri sunt numite elemente de construcții. Există trei tipuri de elemente:

- **bară** - element care are o dimensiune (**lungimea**) mai mare în raport cu celelalte două (dimensiunile secțiunii transversale); barele se clasifică în raport cu forma secțiunii, forma axei (drepte, curbe, poligonale sau frânte) sau mărimea secțiunii transversale în lungul axei (bare cu secțiune constantă sau cu secțiune variabilă);

- **placă** (dală) - element având două dimensiuni (**lățimea şi lungimea**) mai mari în raport cu cea de a treia dimensiune care este grosimea plăcii; plăcile pot fi plane sau curbe (după forma suprafeței mediane), cu grosime constantă sau variabilă;

- **bloc** (masiv) - element având cele trei dimensiuni apropiate ca mărime (de exemplu: fundații izolate, ziduri de sprijin, culee de poduri).

### 1.2.2 Reazeme şi reacțiuni

Pentru structurile plane, încărcate în planul lor, exista următoarele tipuri de reazeme:

## 1.2 STRUCTURES FOR CONSTRUCTION

A structure is an assemblage of structural members, linked to each other by rigid or pin **internal connections** and fixed to the ground or other bearing surface by supports **(external connections**).

The following paragraphs will remind the reader of some of the knowledge studied at Strength of Materials regarding the structural members and supports.

### 1.2.1 Structural members

The components of a structure are called structural elements or members. There are three types of members:

- **bar** - member with one dimension (**length**) larger than the other two (dimensions of the cross section); bars can be classified according to the shape of the cross section, the shape of the axis (straight, curved, polygonal or folded) or the size of the cross section along the axis (bars with constant or with variable cross section);

- **plate** - member with two dimensions (**length and width**) larger than the third one which is the depth or thickness of the plate; plates can be plane or curved (depending on the shape of the median surface), with constant or variable depth;

- **block** - member with all the three dimensions close in size (i.e: isolated foundations, bridge abutments, retaining walls).

### 1.2.2 Supports and reactions

For plane structures, loaded in their plane, the following types of supports exist:

- **reazemul simplu** (reazemul mobil), legătură care împiedică numai deplasarea normală pe suprafaţa de rezemare şi care introduce în calcul o singură necunoscută, fig.1.1;

- **articulaţia plană** (reazemul fix), legătură care împiedică deplasările, permiţând numai rotirea şi care introduce în calcul două necunoscute (o forţă care are necunoscute mărimea şi direcţia, sau cele două componente V, H), fig.1.2 şi 1.3;

- **încastrarea,** legătură completă care împiedică deplasările şi rotirea şi care introduce în calcul trei necunoscute (de obicei componentele V şi H ale reacţiunii şi momentul reactiv M ) fig.1.4;

- **roller support** prevents only the translation perpendicular to the supporting surface and introduces only one unknown in calculations, fig.1.1;

- **pin support** prevents the translations and allows only the rotation; it introduces two unknowns in calculations (one force whose magnitude and direction are unknown or the two components V, H), fig.1.2 and 1.3;

- **built-in support (clamped support)** prevents the translations and the rotation and introduces three unknowns in calculations (usually the components V and H of the reaction and the moment M), fig.1.4;

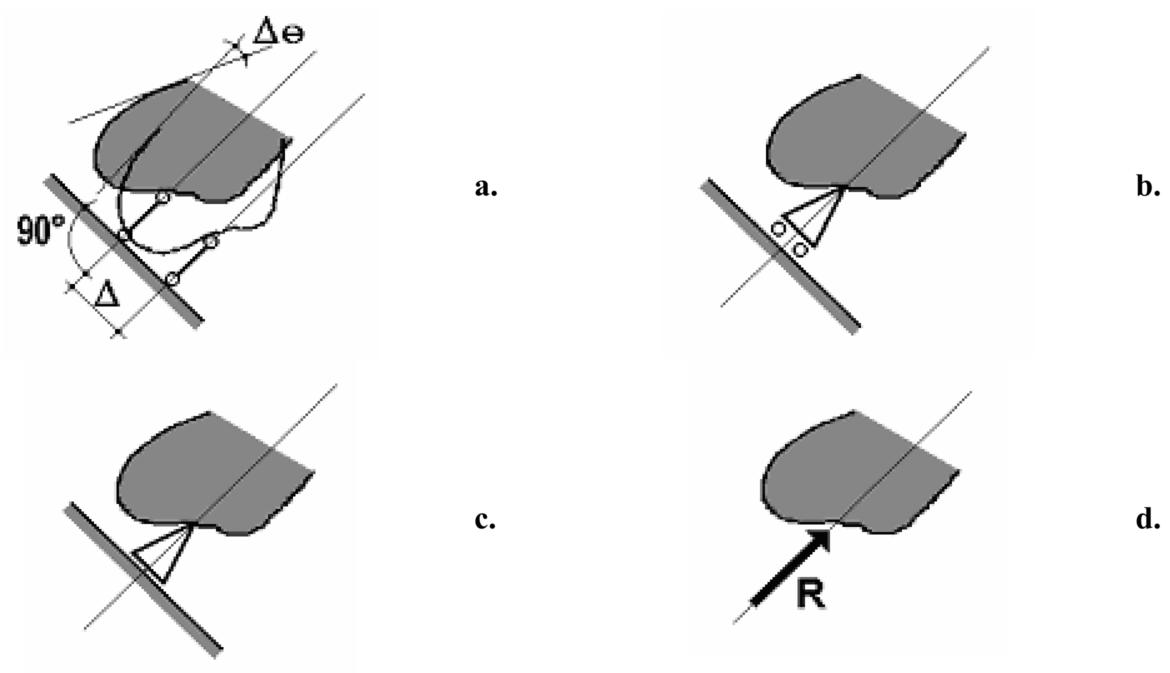



**Fig.1.1**

**Reazemul simplu.**

a., b. şi c. - reprezentarea reazemului simplu, d. - forţa de legătură (reacţiunea) şi dreapta suport

**Roller support.**

a., b. and c. - pin support, d. - reactive force (reaction) and line of action

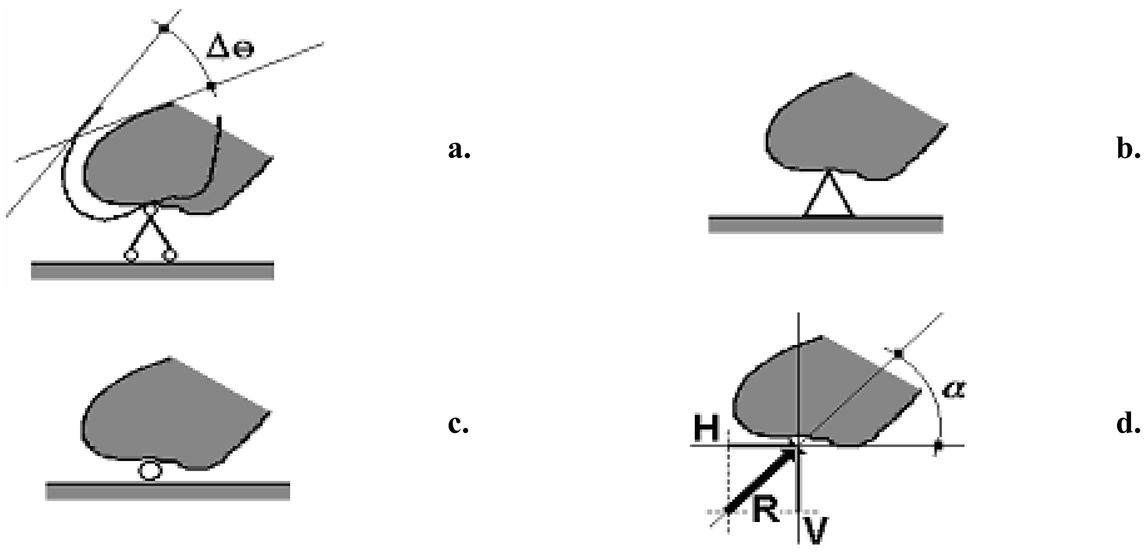



**Fig.1.2**

**Articulația plană - legătură exterioară.**
a., b. şi c. - reprezentarea articulației plane, d. - forța de legătură şi componentele sale

**Pin support - external connection.**
a., b. and c. - representation of the pin support, d. - reaction and its components

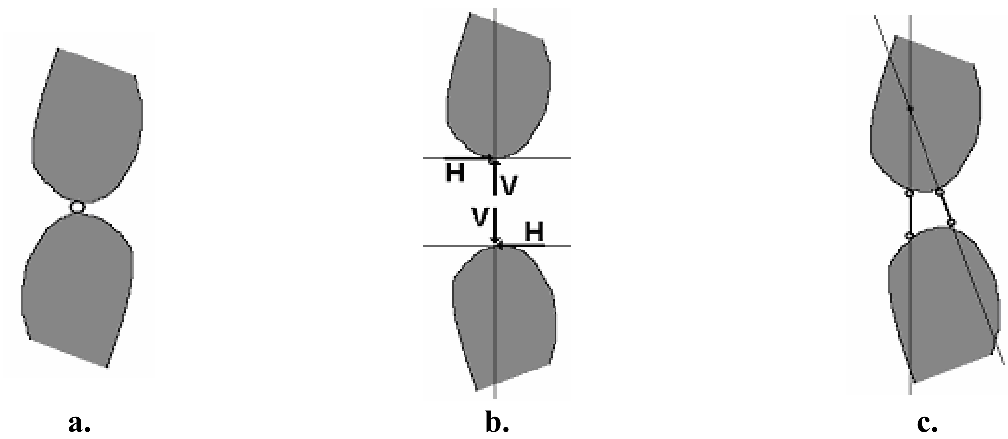



**Fig.1.3**

**Articulația plană - legătură interioară.**
a. şi c. - reprezentarea articulației plane,
b. - componentele forței de legatură

**Hinge - internal connection.**
a. and c. - hinge, b. - components of the reaction

- **încastrarea glisantă plană**, legătură care împiedică deplasarea normală pe suprafața de rezemare şi rotirea şi introduce în calcul două necunoscute (reacțiunea normală N pe suprafața de rezemare şi momentul reactiv M), fig.1.5;

- **guided roller** prevents the translation perpendicular to the supporting surface and the rotation and introduces two unknowns in calculations (reaction N perpendicular to the supporting surface and the reactive moment M), fig. 1.5;

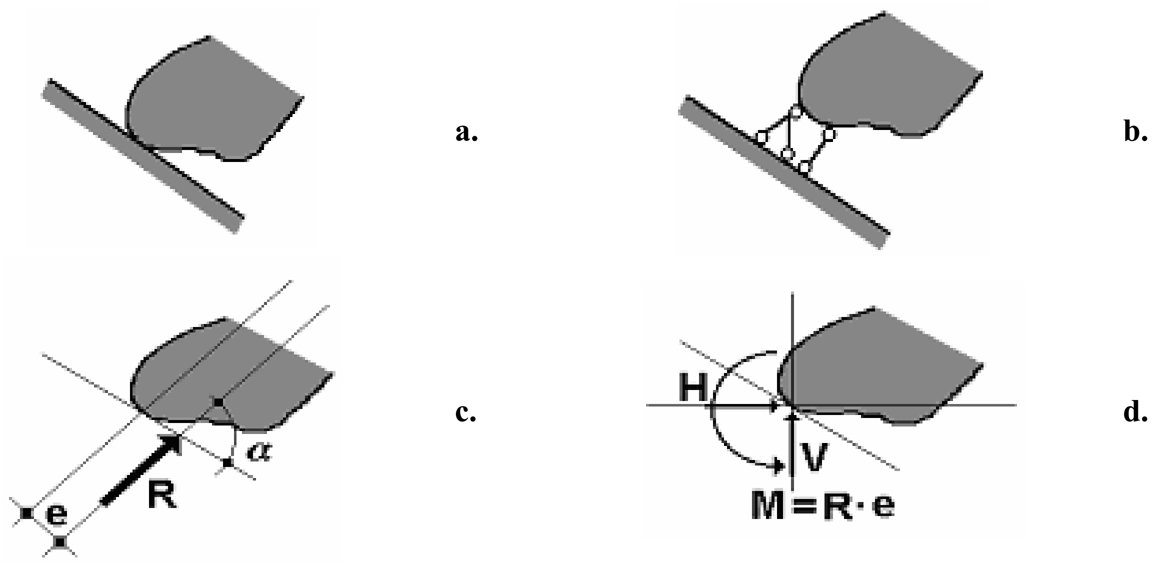



**Fig.1.4**

**Incastrarea plană.**
a. şi b. - reprezentarea încastrării, c. - forţa de legătură, d. - componentele forţei de legătură

**Built-in support.**
a. and b. - fixed support, c. - reaction, d. - components of the reaction

- **reazemul tasabil**, legătură care împiedică parţial deplasarea normală pe suprafaţa de rezemare şi introduce în calcul o singură necunoscută, fig.1.6, (unde **k** este **rigiditatea** reazemului);

- **spring support** partially prevents the displacement perpendicular to the supporting surface and introduces only one unknown in calculations, fig. 1.6 (where **k** is the **spring constant**);

- **încastrarea elastică,** legătură care împiedică deplasările şi parţial rotirea şi introduce în calcul trei necunoscute (componentele V şi H ale reacţiunii şi momentul reactiv M), fig.1.7.

- **rotational spring support** prevents the displacements and partially the rotation and introduces three unknowns in calculations (components V and H of the reaction and the reactive moment M), fig. 1.7.

### 1.2.3 Stabilitate geometrică şi analiză statică

### 1.2.3 Geometric stability and static analysis

O structură este formată din elemente cuplate prin legături. In funcţie de numărul de legături dintre elemente şi cu terenul, structurile pot fi:

A structure is composed of members linked to each other by connections. Depending on the number of connections between members and to the ground, structures can be:

- **geometric stabile** - dacă pentru orice deplasare impusă se dezvoltă o rezistenţă care o împiedică;

- **geometrically stable** - if for any imposed displacement there is a resistance to constrain it;

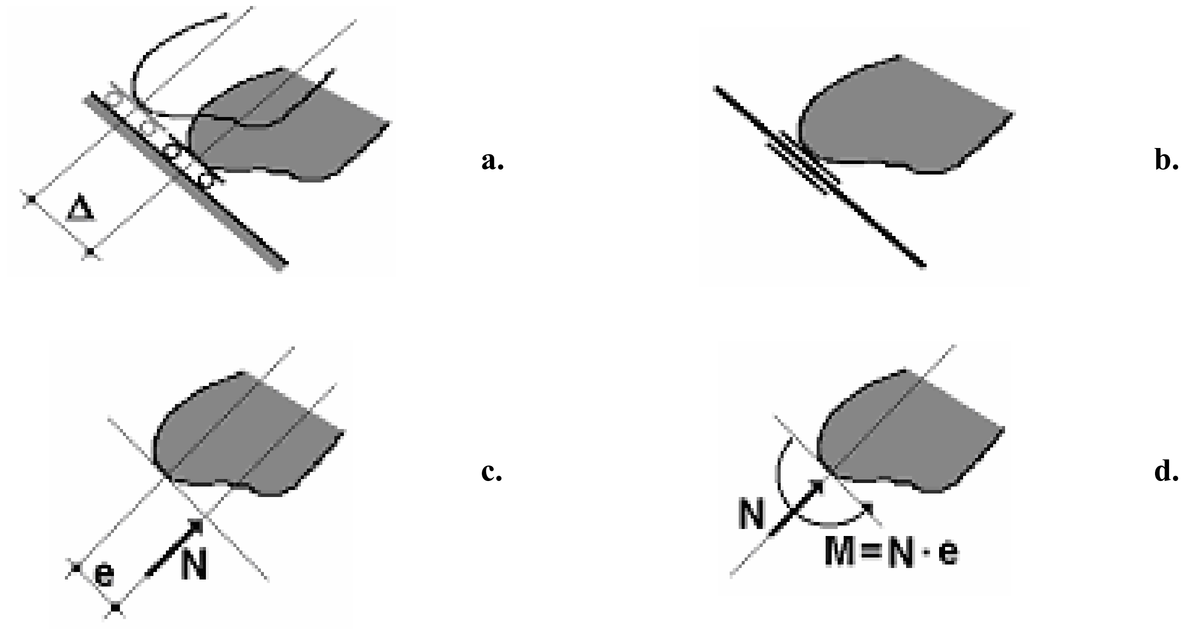



**Fig.1.5**

**Incastrarea glisantă plană.**
a. şi b. - reprezentarea încastrării , c. - forța de legătură, d. - componentele forței de legătură

**Slider (guide).**
a. and b. - slider, c. - reaction, d. - components of the reaction

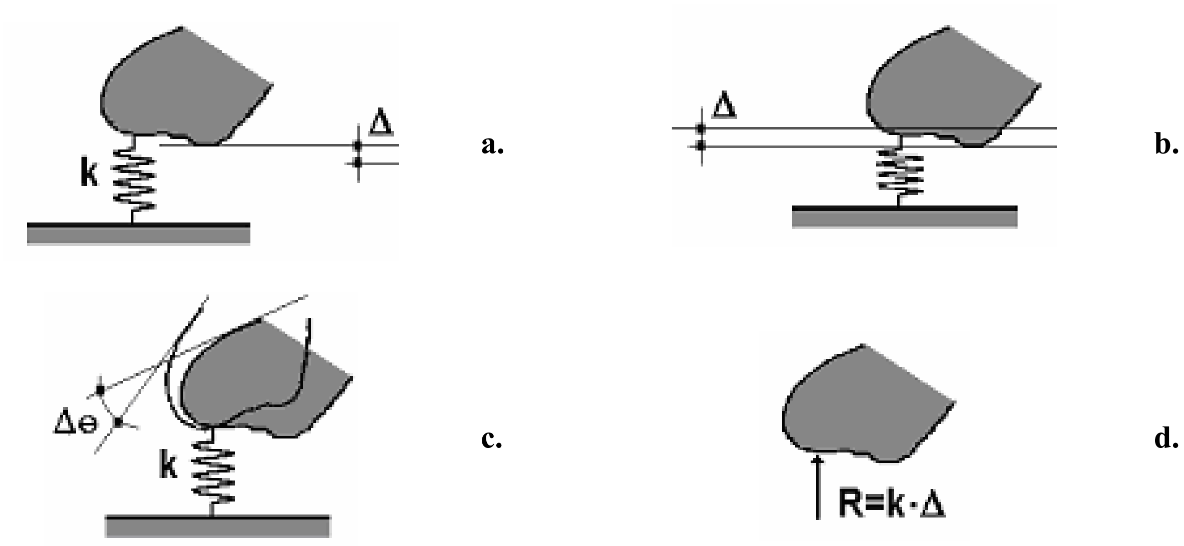
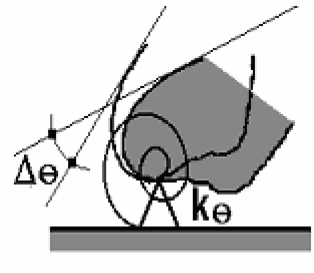


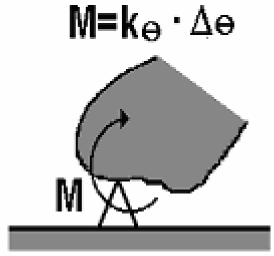

**Fig.1.6**

**Reazemul tasabil.**
a., b. şi c. - reprezentarea reazemului, d. - forța de legătură (reacțiunea)

**Spring support.**
a., b. and c. - spring support, d. - reaction




a.




b.

**Fig.1.7**

**Incastrarea elastică.**
a.- reprezentarea încastrării elastice,
b. - momentul reactiv

**Rotational spring support.**
a. - representation of the rotational spring support, b. - reactive moment

- **geometric instabile** - dacă pentru orice deplasare impusă nu se dezvoltă o rezistență care o împiedică, ceea ce înseamnă că sistemul nu are un număr suficient de legături sau că legăturile sunt incorect amplasate, fig.1.8.a şi b;
- **static determinate -** dacă numărul de legături simple este minim necesar pentru fixarea structurii, fig.1.8.c;
- **static nedeterminate -** dacă numărul de legături simple este mai mare decât cel minim necesar pentru fixarea structurii, fig.1.8.d.

- **geometrically unstable** - if for any imposed displacement, there is no resistance to constrain it. It means that the system doesn't have a minimum number of connections or that the connections are incorrectly located, fig. 1.8.a and b;
- **statically determinate** - if the number of simple connections is the minimum necessary to constrain the structure, fig.1.8.c;
- **statically indeterminate or redundant** - if the number of simple connections is greater than the minimum necessary to constrain the structure, fig.1.8.d.

**O structură este fixă în plan când condițiile de fixare din fig.1.8. c şi d sunt respectate.**

**A structure is constrained in plane when the constraining conditions shown in fig. 1.8c and d are satisfied.**

Se fac, în general, notațiile următoare:

**c -** **este numărul de corpuri deschise** (ansambluri de bare legate rigid între ele) care compun structura;

**l -** **numărul de legături simple interioare** care există între cele **c** corpuri;

**r -** **numărul de legături simple exterioare** (numărul de reacțiuni necunoscute) ale structurii;

Generally, the following notations are made:

**c -** **is the number of open bodies** (assemblage of bars rigidly connected between them) which compose the structure;

**l -** **number of simple internal connections** which exist between the **c** bodies;

**r -** **number of external simple connections** (number of the unknown reactions) of the structure;

**n -** **numărul total de legături simple** sau numărul de necunoscute exterioare şi interioare (numărul forţelor de legătură) care trebuie determinate pentru rezolvarea structurii;

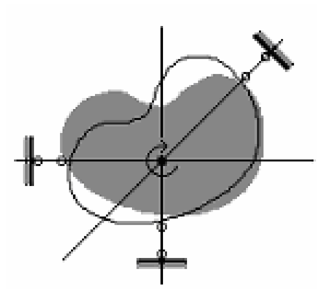
**e -** **numărul de ecuaţii distincte de echilibru static** care se pot scrie pentru structură;

**h -** **gradul de nedeterminare statică** al structurii.

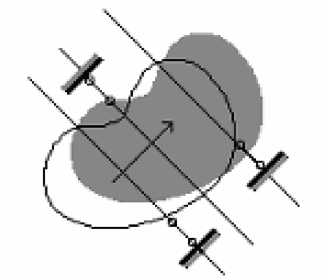
**n -** **total number of simple connections** or number of external and internal unknowns (number of reactive forces) to be calculated;

**e -** **number of distinct equations of static equilibrium** which can be written for the structure;

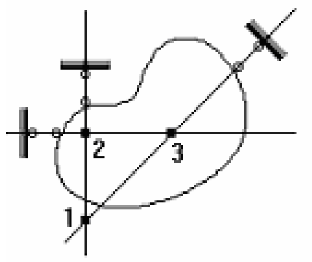
**h -** **degree of indeterminacy** of the structure.



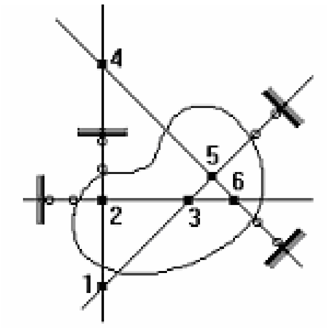
**a.**



**b.**




**c.**




**d.**

**Fig.1.8**

**Legăturile unui sistem.**
a. şi b. - hipostatic (mecanism),
c. - static determinat, d. - static nedeterminat

**Connections of a system.**
a. and b. - hypostatic (mechanism),
c. - statically determinate,
d. - statically indeterminate (hyperstatic)

Există relaţiile următoare:

The following relationships exist:

$$e = c \cdot 3 \quad \textbf{(1.1)}$$

$$n = l + r \quad \textbf{(1.2)}$$

$$\mathbf{h = n - e = (l + r) - 3 \cdot c} \quad \textbf{(1.3)}$$

Pentru un sistem există trei posibilităţi :

There are three types of systems:

- **h = 0** sau / or **n = e** - **static determinat / statically determinate;**
- **h > 0** sau / or **n > e** - **static nedeterminat / statically indeterminate;**
- **h < 0** sau / or **n < e** - **mecanism / mechanism.**

Pentru a face analiza statică a unei structuri, se pot folosi procedeele indicate în fig.1.9.

In order to perform the static analysis of a structure, the procedures shown in fig. 1.9 can be used.

Se ştie că un contur perfect închis (de exemplu structura din fig.1.9) are un grad de nedeterminare statică egal cu trei.

It is known that a perfectly closed loop (for example the structure in fig.1.9) has a degree of indeterminacy equal to three.

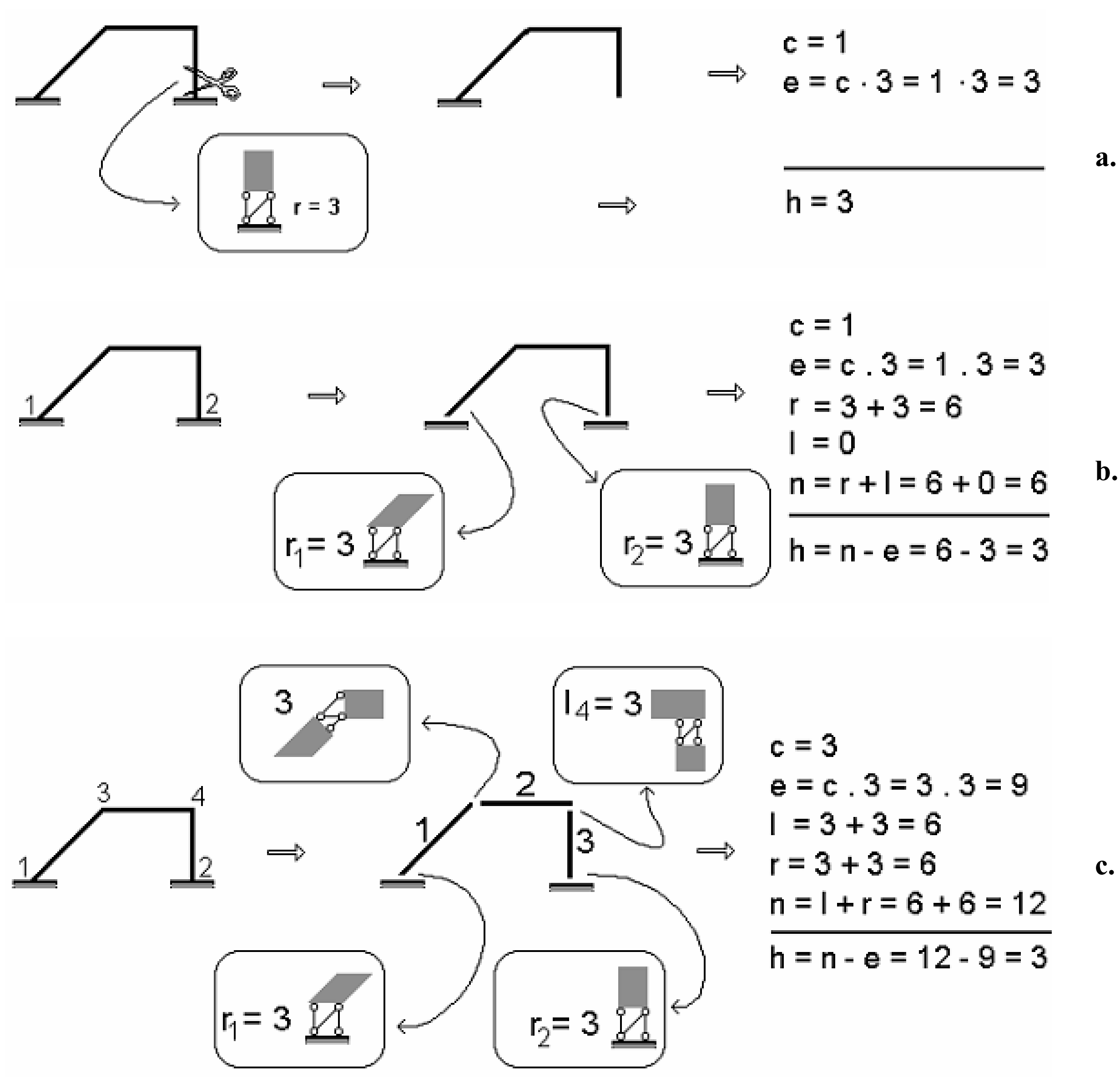



**Fig.1.9**

**Procedee de analiză statică a unei structuri.**
a. - prin eliminarea legăturilor suplimentare,
b. şi c. - prin analiza elementelor structurii

**Procedures for the static analysis of a structure.**
a. - releasing the redundancies, b. and c. - by the analysis of the structural members

Pentru **structurile compuse din contururi închise**, unde **k** este numărul contururilor închise, se poate scrie relația:

For the **structures composed of closed loops**, the following relationship can be written (**k** is the number of closed loops):

$$h = k \cdot 3 \qquad \textbf{(1.4)}$$

Relația 1.4 este valabilă când toate contururile sunt perfect închise (nodurile sunt rigide și legăturile exterioare sunt încastrări).

The relationship 1.4 is valid when all the loops are perfectly closed (the joints are rigid and the external connections are fixed supports).

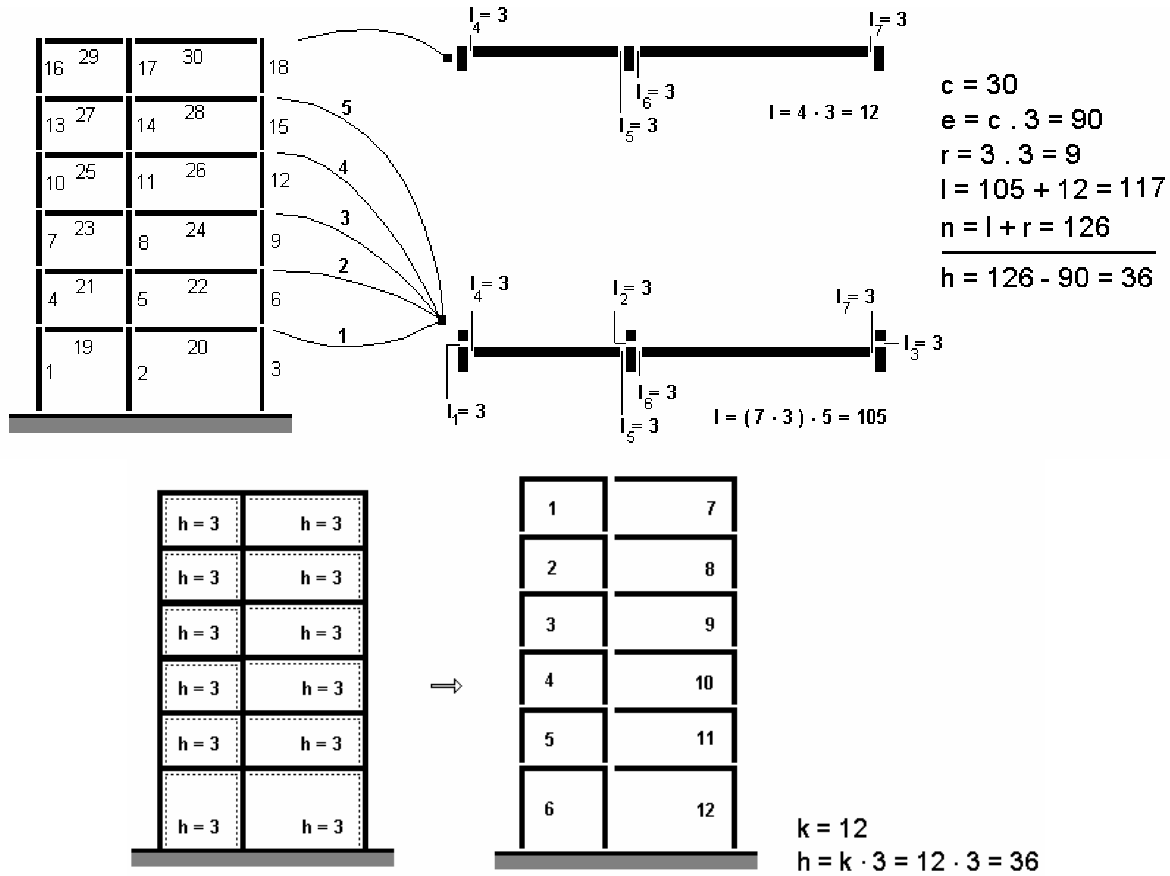
In cazul în care există contururi imperfecte, **s** fiind numărul legăturilor care lipsesc, relația 1.4 devine:

In the case when there are imperfect loops, the relationship 1.4 becomes (**s** is the number of missing connections):

$$h = k \cdot 3 - s \qquad \textbf{(1.4.a)}$$

In figurile 1.10 ... 1.12 se prezintă analiza statică a unei structuri.

Figures 1.10 ... 1.12 show the static analysis of a structure.




a.

b.

**Fig.1.10**

**Analiza statică a unei structuri.**
a. - prin elementele componente, b. - prin contururi închise

**Static analysis of a structure.**
a. - by the component members, b. - by closed loops

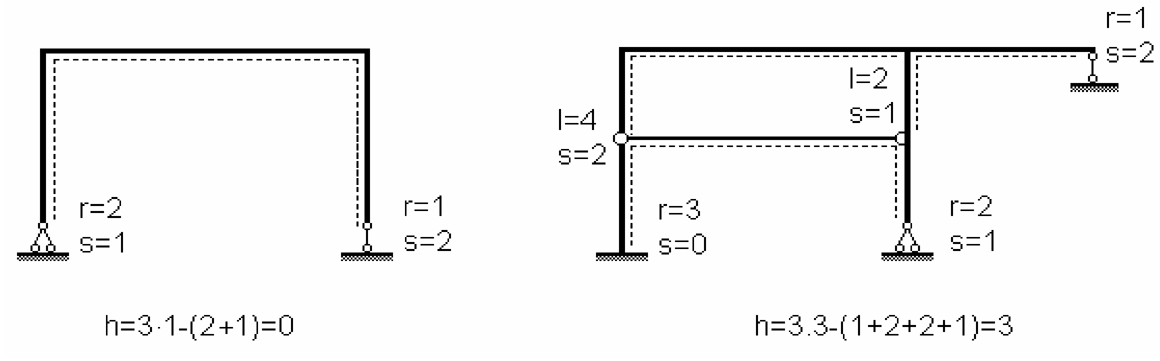


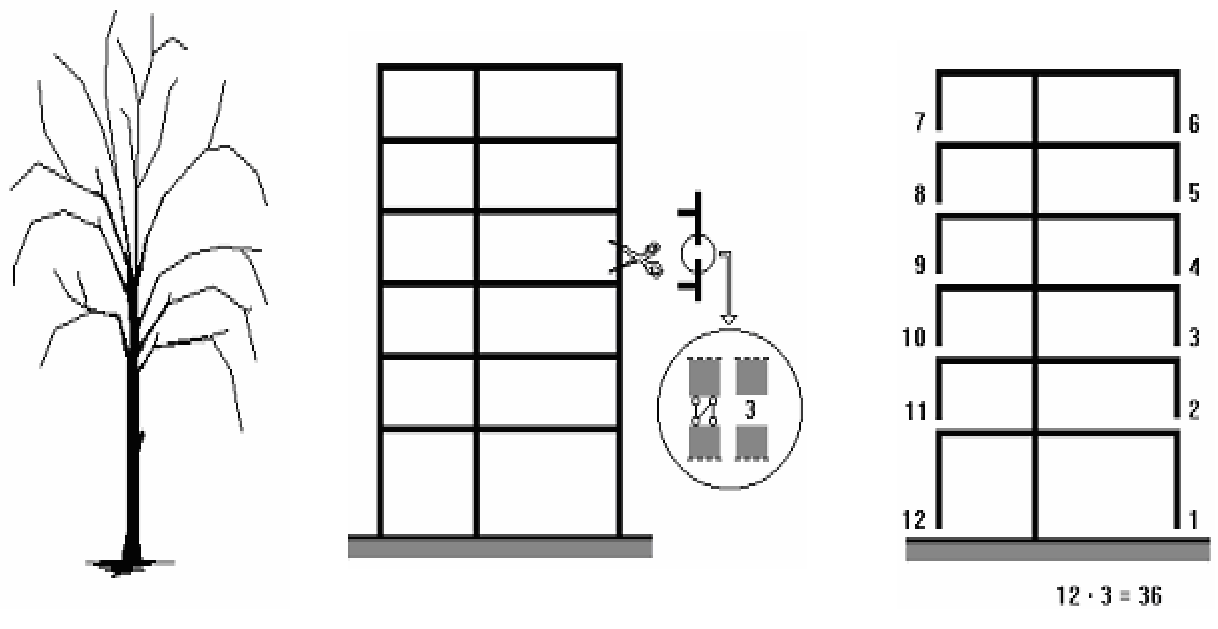

**Fig.1.11**

**Analiza statică a unei structuri prin contururi închise.**

**Static analysis of a structure by closed loops.**

In fig.1.11 sunt indicate valorile pentru **l**, **r**, şi **s** pentru structuri cu diverse tipuri de legături interioare şi exterioare iar in fig.1.12 este prezentată analiza statică a unei structuri prin analogia cu un arbore.

Fig.1.11 shows the values for **l**, **r** and **s** for structures with different types of internal and external connections. Fig.1.12 shows the static analysis of a structure by analogy to a tree.




**a.** **b.** **c.**

**Fig. 1.12**

**Analiza statică a unei structuri prin analogie.**

a. - un arbore este o structură static determinată.,
b. - o structură static nedeterminată, c. - analiza statică prin analogie cu un arbore

**Static analysis of a structure by analogy.**

a. - tree as a statically determinate structure,
b. - statically indeterminate structure,
c. - static analysis by analogy to a tree

## 1.2.4 Structuri de rezistență

Principalele tipuri de structuri utilizate în construcții sunt:

- **grinzi simple,**
- **grinzi continue,**
- **cadre,**
- **arce,**
- **structuri mixte pentru poduri,**
- **structuri suspendate,**
- **structuri cu zăbrele,**
- **structuri cu diafragme şi mixte.**

## 1.2.4 Structures

The main types of structures used in construction are:

- **simple beams,**
- **continuous beams,**
- **frames,**
- **arches,**
- **mixed structures for bridges,**
- **suspended structures,**
- **trusses,**
- **diaphragm wall and mixed structures.**

### 1.2.4.a Grinzi

Grinzile sunt structuri cu axa rectilinie, având una sau mai multe deschideri, solicitate în special la încovoiere. Ele sunt utilizate pentru planşee, acoperişuri, poduri, căi de rulare, fundații, etc.

Se utilizează:

- **grinzi drepte simple** (cu o deschidere) - grinda simplu rezemată cu sau fără console, grinda încastrată, grinda dublu articulată, grinda dublu încastrată, grinda încastrată - articulată, fig.1.13 - 1.14;

### 1.2.4.a Beams

Beams are structures with straight axis, having one or more spans, being subjected mainly to bending. Beams are used for slabs, roofs, bridges, gantry girders, foundations, etc.

There are:

- **simple straight beams** (with one span) - simply supported beams with or without cantilever, cantilever beams, double-pinned beams, beams with built-in support at both ends, beams with built-in support at one end and pin support at the other end, fig. 1.13 - 1.14;

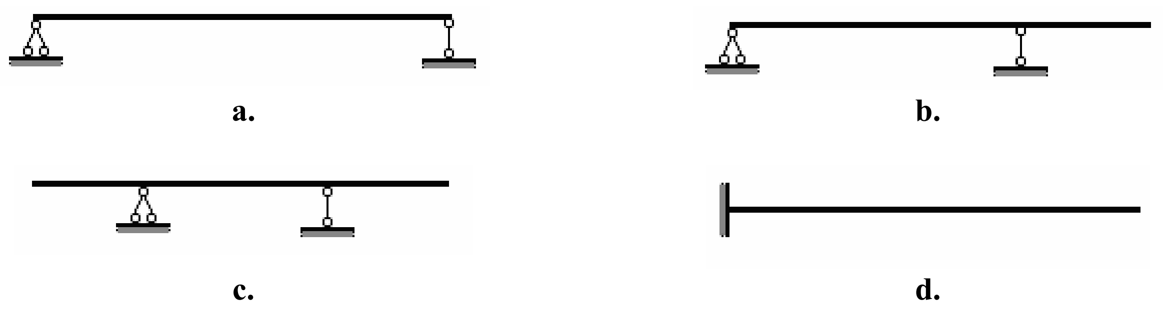



**Fig. 1.13**

**Grinzi static determinate.**
a.- grinda simplu rezemată, b. şi c. - grinzi simplu rezemate cu una şi două console, d. - grinda încastrată

**Statically determinate beams.**
a. - simply supported beam, b. and c. - simply supported beams with one or two overhangs, d. - cantilever beam

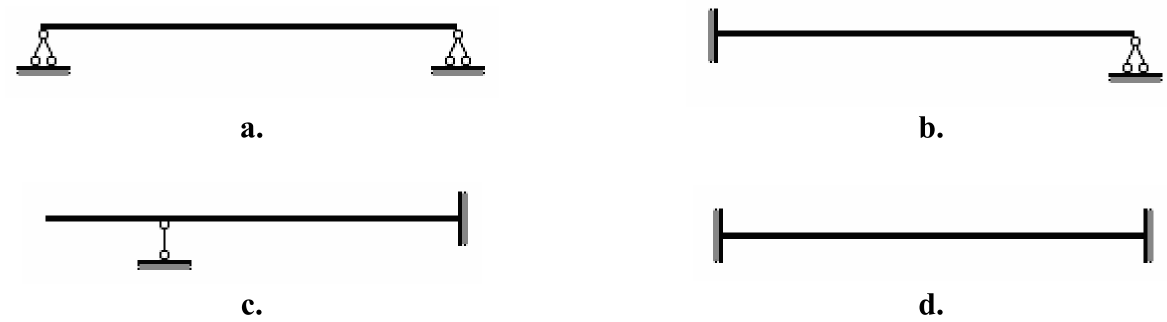


Fig. 1.14

**Grinzi static neterminate.**
a.- grindă dublu articulată,
b.- grindă încastrată-articulată,
c. - grindă incastrată-simplu rezemată,
d - grindă dublu încastrată

**Statically indeterminate beams.**
a. - double-pinned beam, b.- beam with built-in support at one end and pin support at the other end, c. - beam with built-in support at one end and roller support at the other end,
d. - beam with built-in support at both ends

- **grinzi continue** (cu două sau mai multe deschideri) care pot fi static determinate (grinzi de tip Gerber) sau static nedeterminate, fig.1.15;

- **continuous beams** (with two or more spans) - they can be statically determinate (Gerber beams) or statically indeterminate, fig. 1.15;

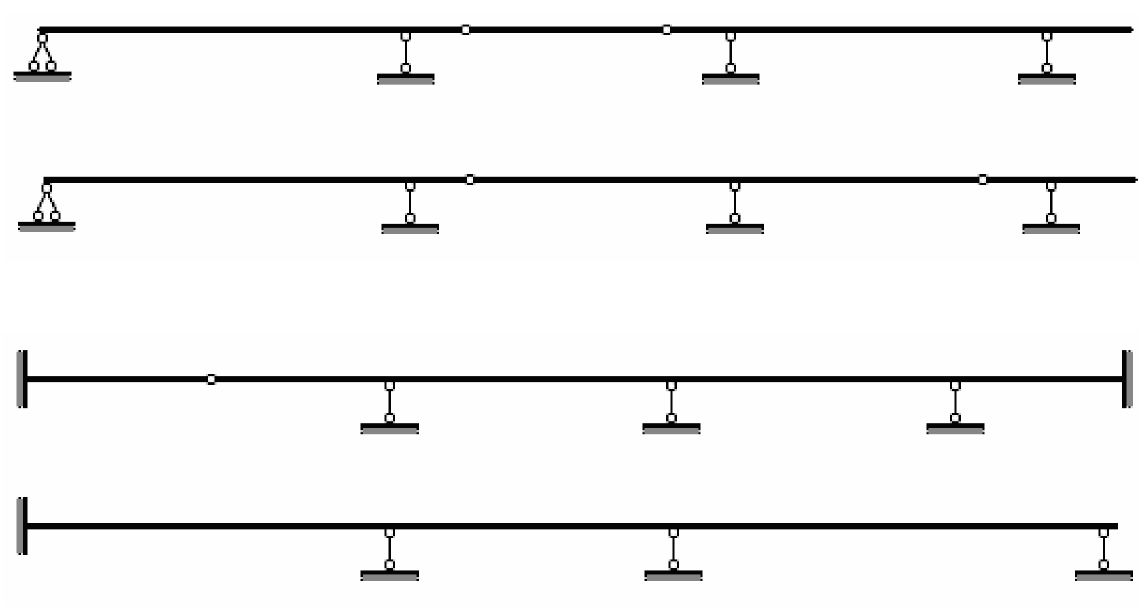



Fig.1.15

**Grinzi continue.**
a. - grinzi Gerber (static determinate),
b. - grinzi static nedeterminate

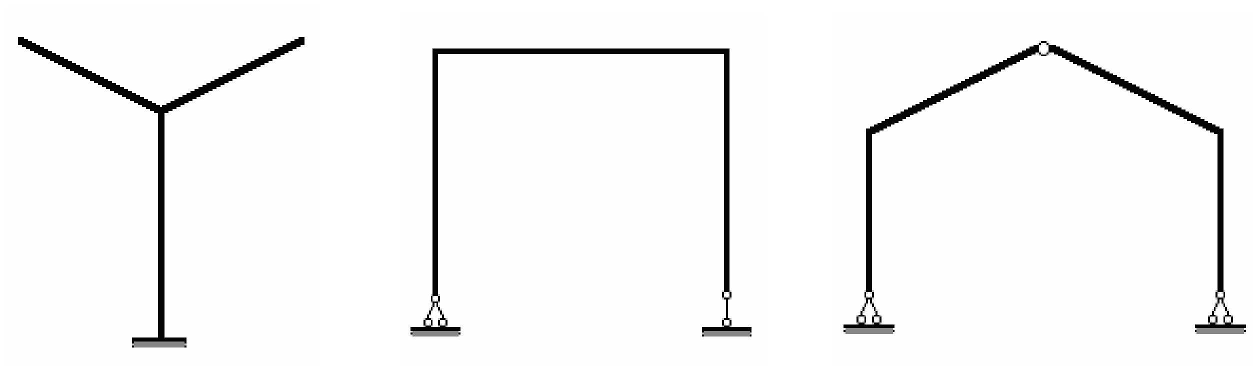
**Continuous beams.**
a. - Gerber beams (statically determinate),
b. - statically indeterminate beams

## 1.2.4.b Cadre

Cadrele sunt structuri alcătuite din două sau mai multe bare drepte sau curbe (grinzi şi stâlpi) legate în noduri rigide sau articulate, fig.1.16 ... 1.20. Cadrele sunt utilizate în construcții civile, industriale, la structuri de poduri, etc.

## 1.2.4.b Frames

Frames are structures composed of two or more straight or curved members (beams and columns), connected by rigid or pin joints, fig.1.16 … 1.20. Frames are used in civil and industrial buildings, bridges, etc.
.



**a.** **b.** **c.**

**Fig.1.16**

**Cadre static determinate.**
a. - cadru peron, b. - cadru simplu rezemat, c. - cadru cu trei articulații

**Statically determinate structures.**
a. - platform frame, b. - simply supported frame, c. - three pinned frame

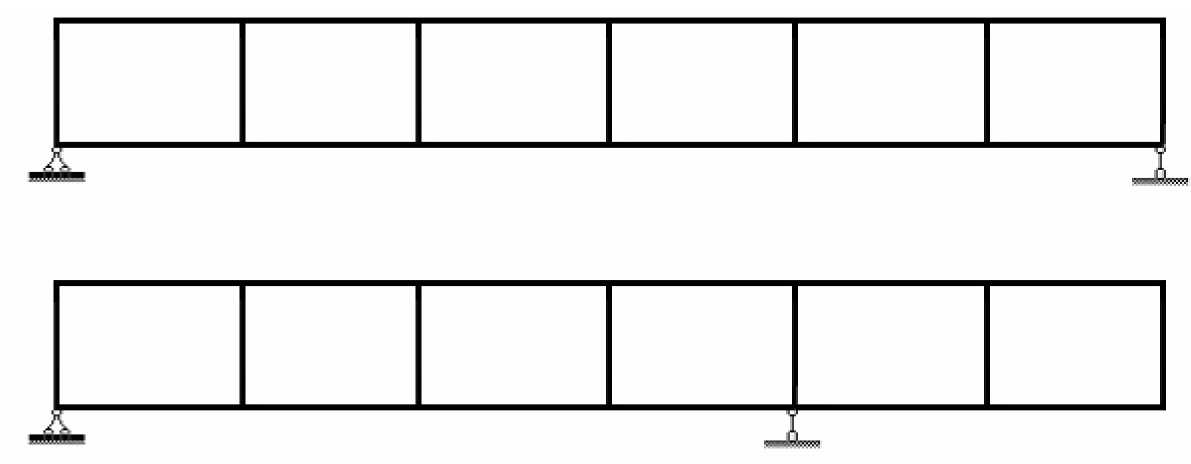


**Fig.1.17**

**Cadru static determinat exterior şi static nedeterminat interior (grindă Vierendeel).**

**Externally statically determinate and internally statically indeterminate frame (Vierendeel girder).**

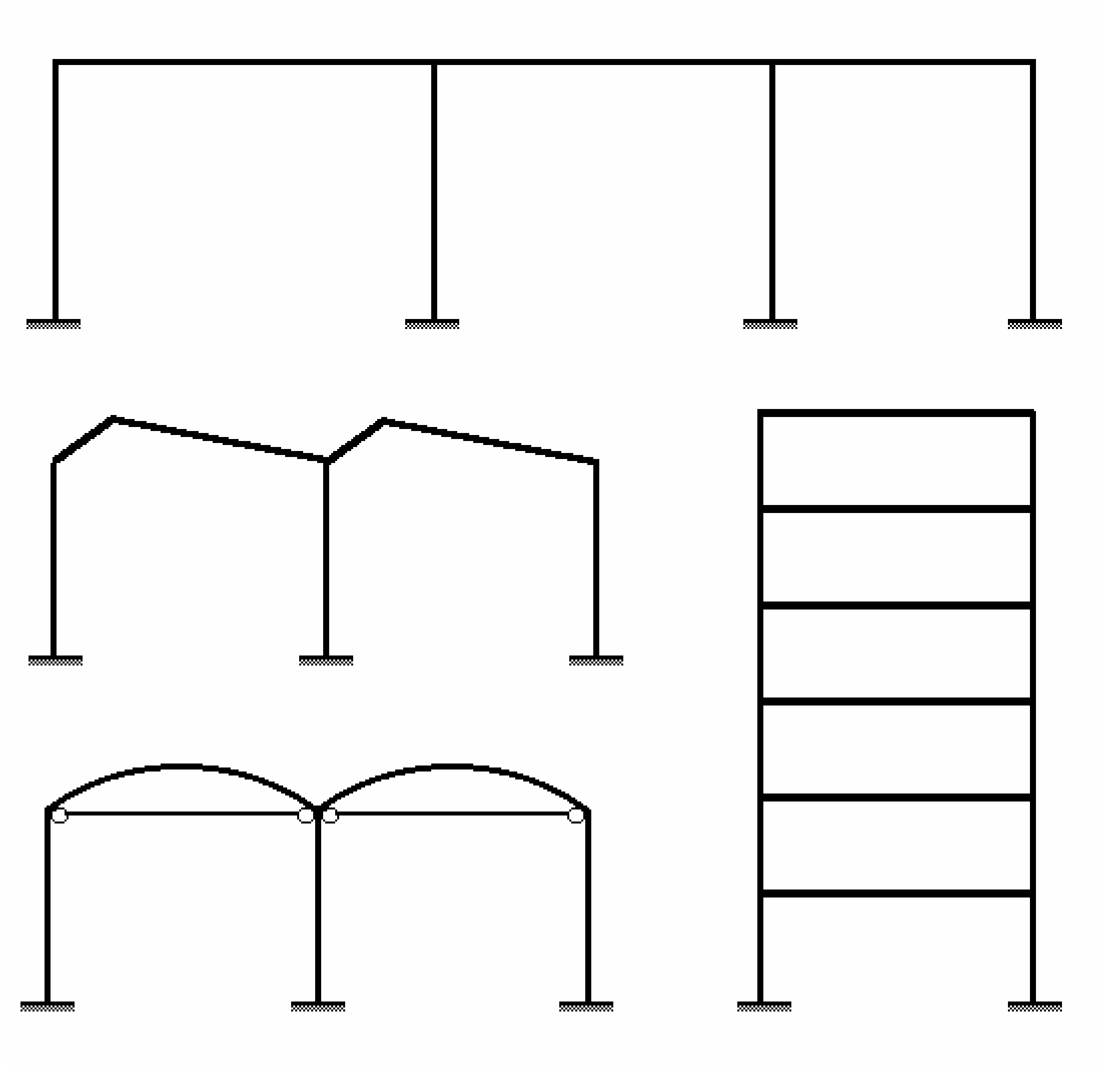


**Fig.1.18**

**Cadre plane static nedeterminate.** **Statically indeterminate frames.**

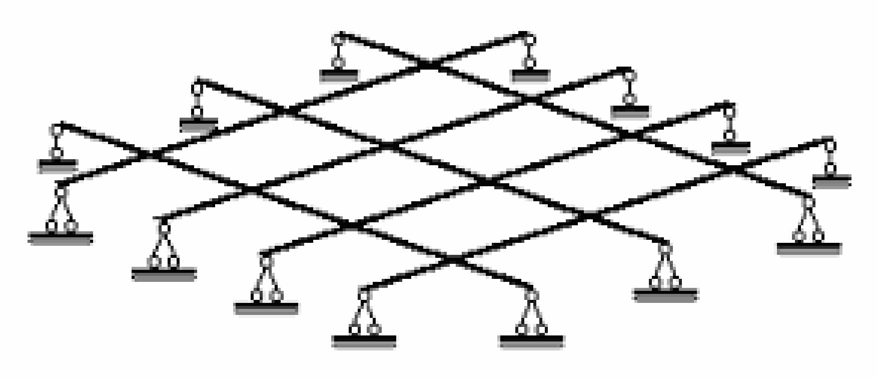


**Fig.1.19**

**Rețea de grinzi.** **Grillage of beams.**

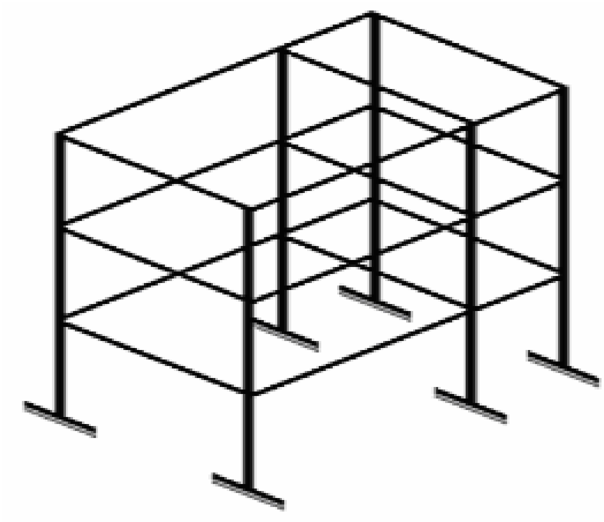


**Fig.1.20**

**Structură spațială în cadre.** **Spatial frame.**

## 1.2.4.c Arce

Arcele sunt structuri cu axa curbă, încărcate în planul lor şi în reazemele cărora apar reacțiuni orizontale (împingeri), chiar dacă încărcările exterioare sunt verticale.

## 1.2.4.c Arches

Arches are structures with curved axis, loaded in their plane. Horizontal reactions (thrusts) develop at supports even in the case of vertical loads.

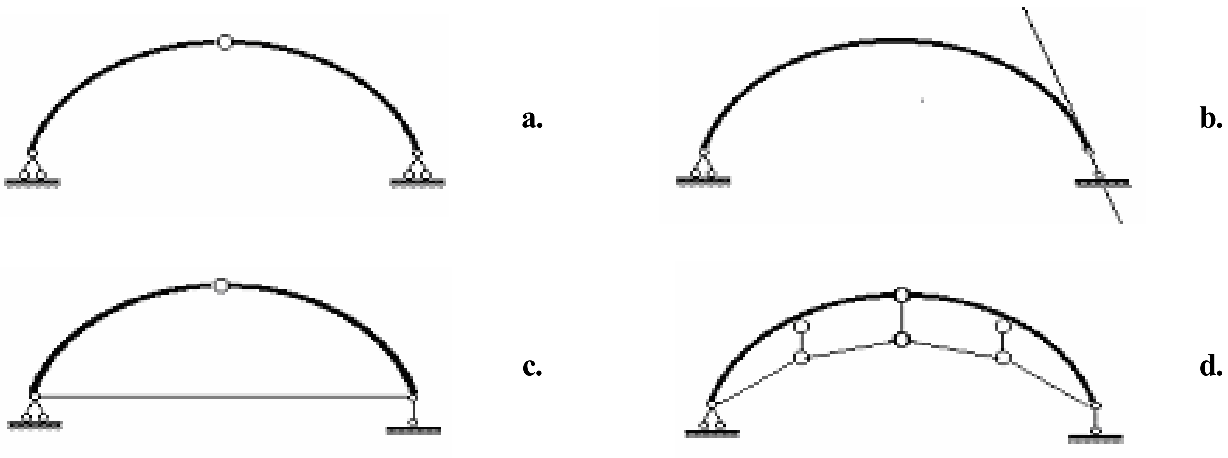



**Fig. 1.21**

**Arce static determinate.**
a. - arc cu trei articulații, b. - arc simplu rezemat, c. - arc cu tirant, d. - arc cu tirant suspendat

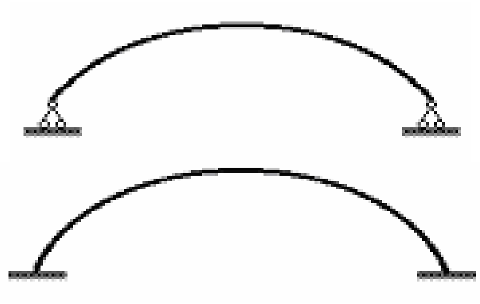
**Statically determinate arches.**
a. - three-pinned arch, b. - simply supported arch, c. - tied arch, d. - elevated tied arch

Arcele sunt utilizate în construcții industriale şi social culturale, structuri de poduri, construcții hidrotehnice etc., fig.1.21. şi 1.22.

Arches are used in the industrial and socio-cultural buildings, bridge structures, hydro technical constructions etc., fig.1.21 and 1.22.

Bolțile sunt arce cu o lățime foarte dezvoltată.

Vaults are arches with very large span.


a.

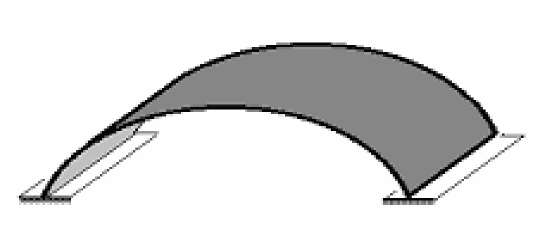

b.

**Fig.1.22**

**a. – arce static nedeterminate, b. - boltă**

**a. - statically indeterminate arches, b. - vault**

## 1.2.4.d Structuri mixte pentru poduri

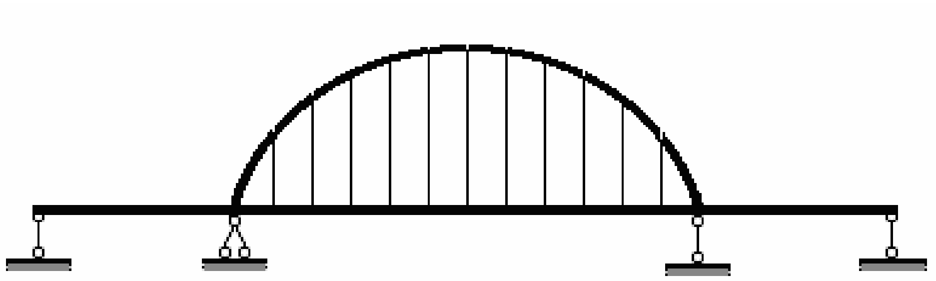
## 1.2.4.d Mixed structures for bridges

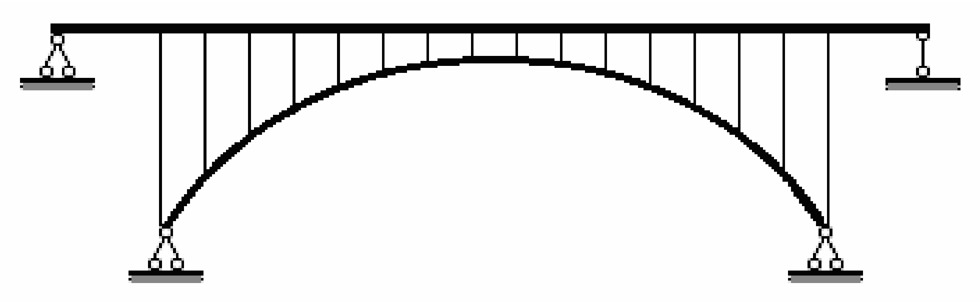
Structurile mixte pentru poduri sunt construcții realizate prin combinarea unor grinzi şi arce, legate între ele prin montanți.

Mixed structures for bridges are structures obtained from the combination of beams and arches, connected to each other by verticals.

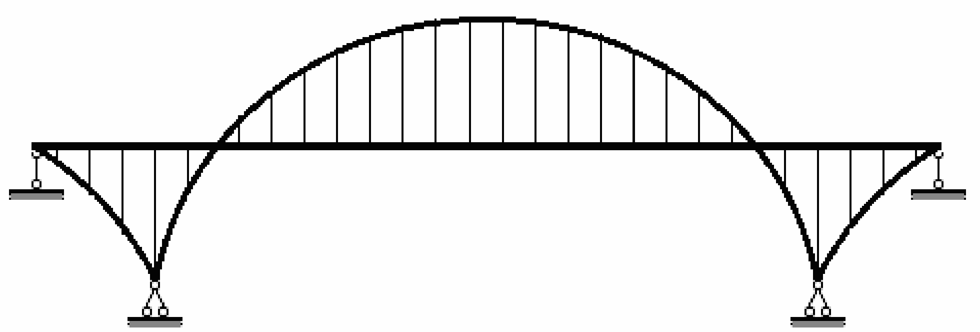
Structurile mixte pot fi: cu calea inferioară, cu calea superioară sau cu calea la mijloc, fig.1.23.

The mixed structures can have lower deck, upper deck or middle deck, fig.1.23.


a.



b.



c.

**Fig.1.23**

**Structuri mixte.**
a. - cu calea inferioară, b. - cu calea superioară, c. - cu calea la mijloc

**Mixed structures.**
a. - lower deck, b. - upper deck, c. - middle deck

## 1.2.4.e Structuri suspendate

Structurile suspendate sunt structuri ale căror elemente principale sunt cablurile de înaltă rezistență şi care permit realizarea de deschideri foarte mari. Există două tipuri de structuri suspendate:

- pentru construcții industriale şi social culturale, fig.1.24,
- pentru poduri, fig.1.25.

## 1.2.4.e Suspended structures

Suspended structures are structures whose main elements are high strength cables. They allow the construction of very large spans. There are two types of suspended structures:

- for industrial and socio-cultural buildings, fig. 1.24,
- for bridges, fig.1.25.

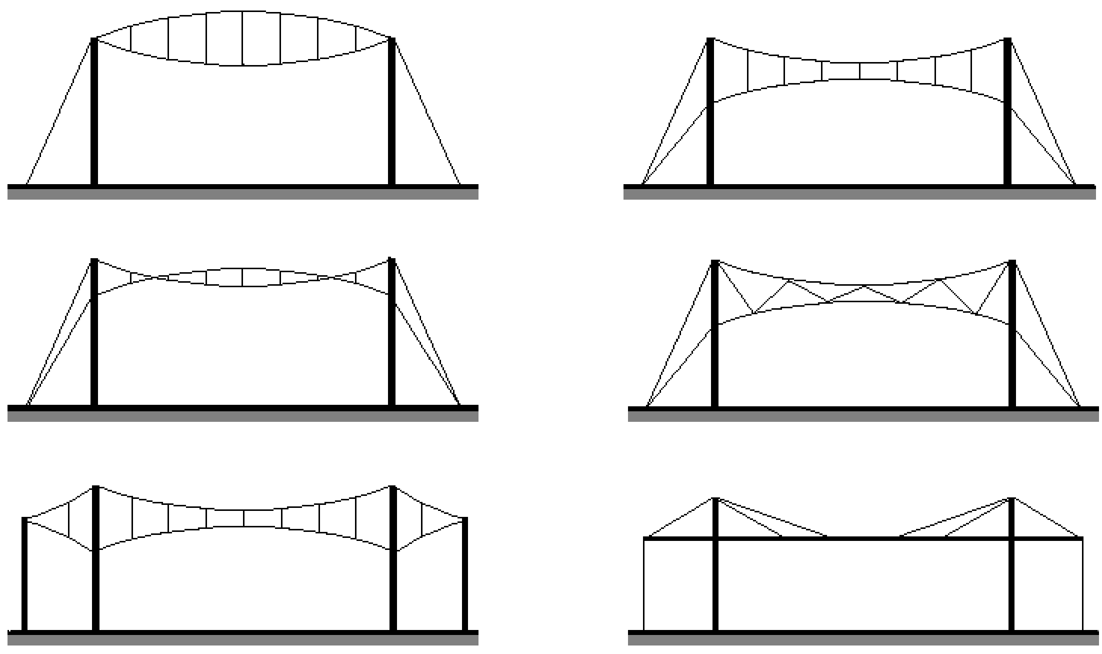


**Fig.1.24**

**Structuri suspendate pentru construcții industriale şi social culturale.**

**Suspended structures for industrial and socio-cultural constructions.**

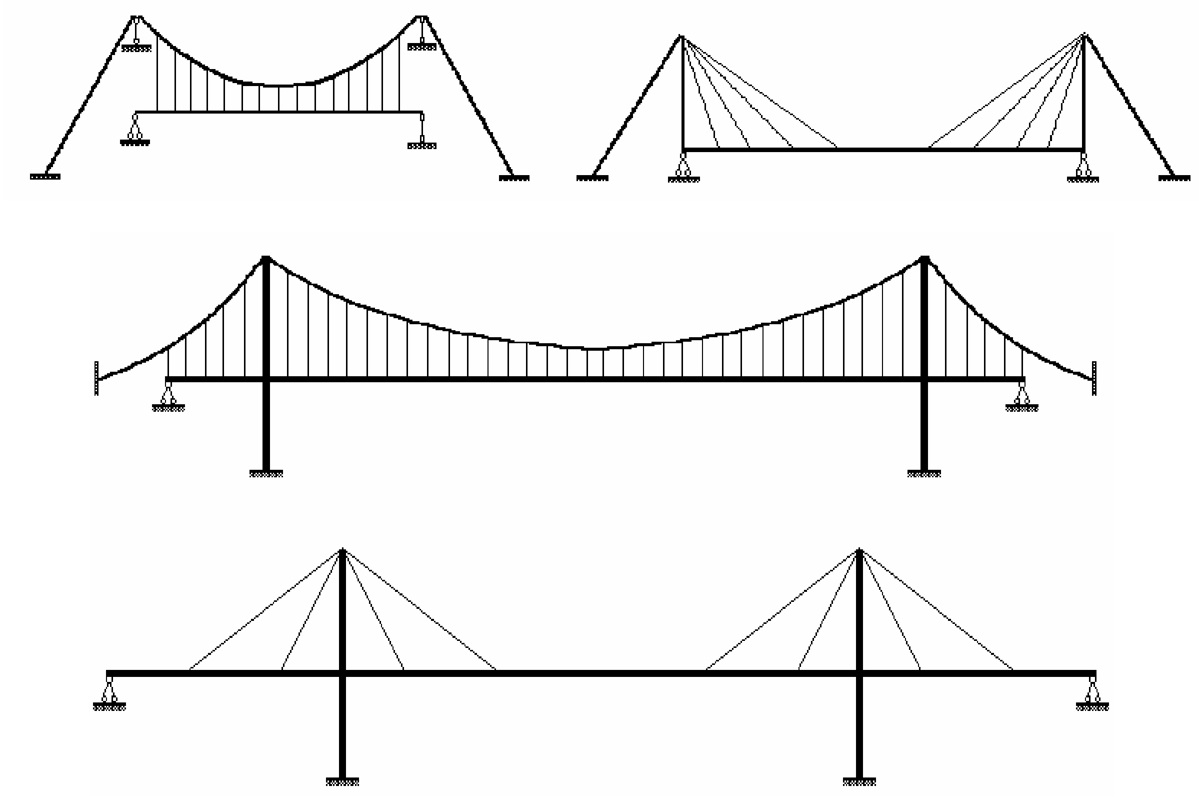


**Fig.1.25**

**Structuri suspendate pentru poduri.**

**Suspended structures for bridges.**

## 1.2.4.f Structuri cu zăbrele

Structurile cu zăbrele sunt structuri care, prin schematizare, se reduc la sisteme geometric indeformabile când nodurile se consideră articulații perfecte, fig.1.26.

## 1.2.4.f Trusses

Trusses are structures which, by virtue of their structural form, are reduced to geometric undeformable systems with the joints considered as perfect pins, fig. 1.26.

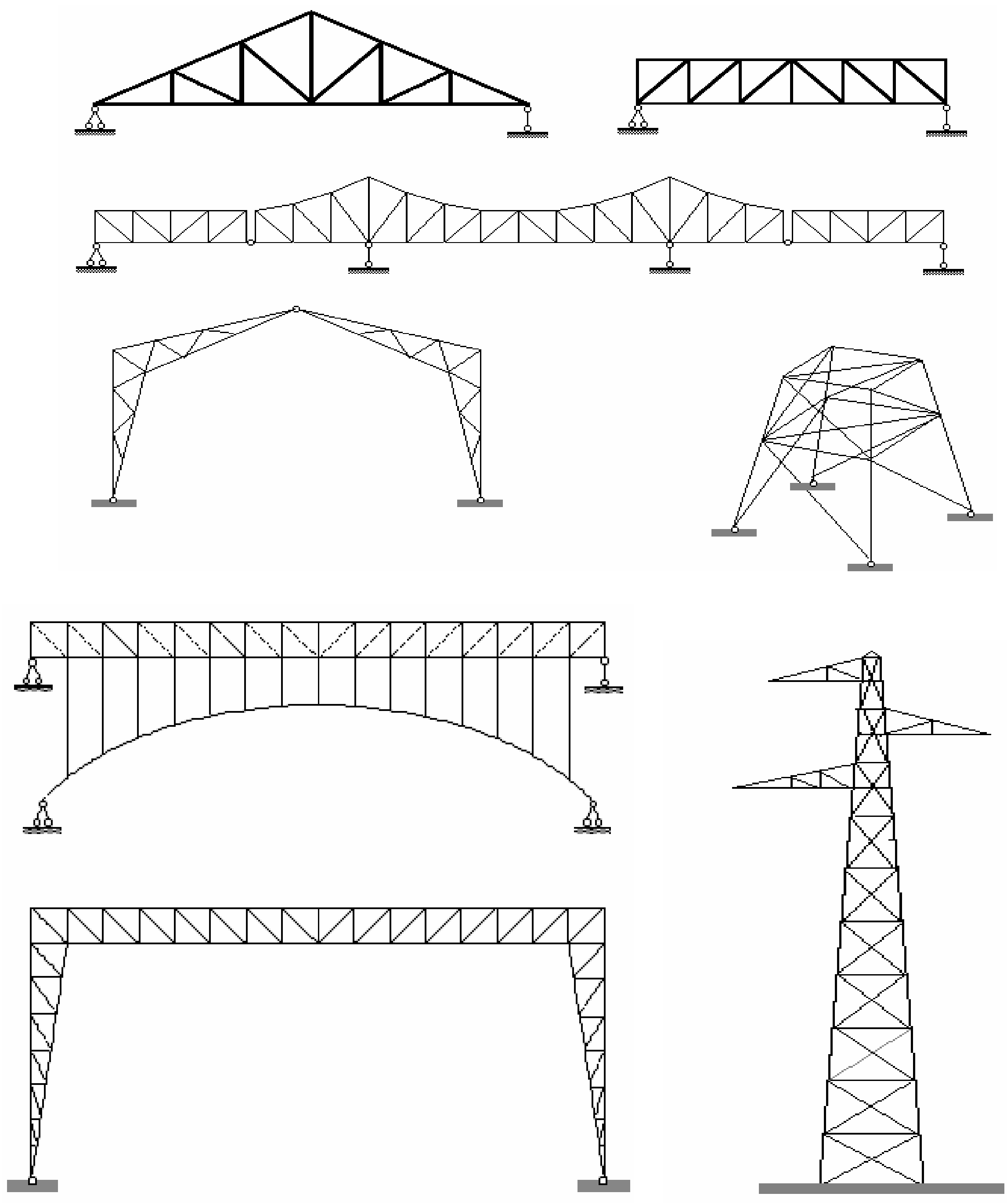


**Fig.1.26**

**Structuri cu zăbrele.** **Trusses.**

Aceste structuri pot fi realizate în totalitate sau parțial pentru orice schemă din cele prezentate anterior (grinzi, arce, structuri mixte). Ele sunt utilizate în construcții industriale, social culturale, poduri, construcții speciale.

Trusses can be totally or partially produced for any structural scheme previously presented (beams, arches, mixed structures). They are used in industrial and socio-cultural buildings, bridges, special constructions.

### 1.2.4.g Structuri din diafragme şi mixte

Structurile din diafragme (pline sau cu goluri) şi mixte (diafragme-cadre) sunt utilizate în construcții de locuințe, social culturale, administrative, fig.1.27.

### 1.2.4.g Diaphragm wall and mixed structures

Diaphragm wall structures (solid or with holes) and mixed structures (diaphragms-frames) are used in domestic buildings, socio-cultural buildings, administrative buildings, fig.1.27.

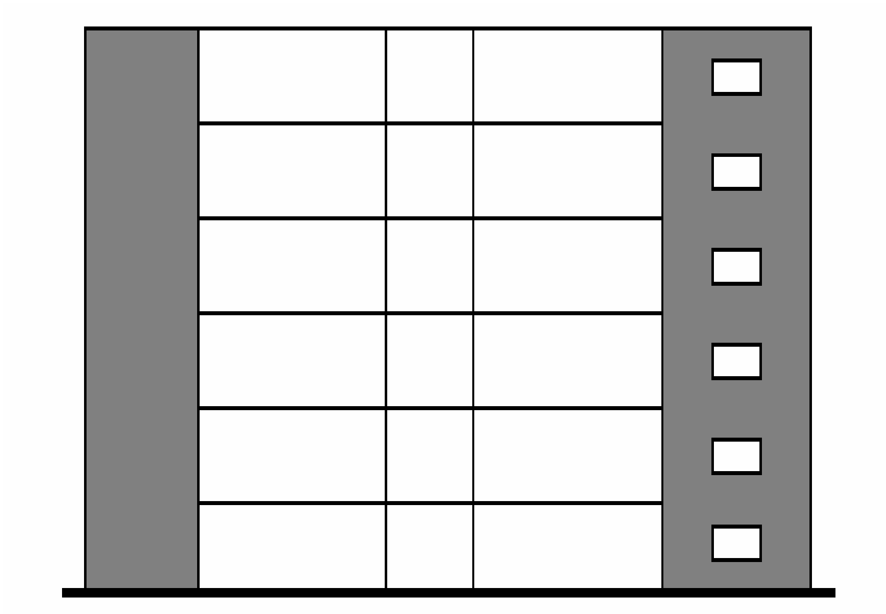


**Fig.1.27**

**Structuri mixte cadre-diafragme.** **Mixed structures frame-diaphragms.**

## 1.3 ACTIUNI IN CONSTRUCTII

Acțiunile sunt cauzele care produc eforturi şi deplasări în elementele de construcții şi în structuri.

## 1.3 LOADS IN CONSTRUCTION

Loads are the causes which produce internal forces and deformations in structural members.

Intensitatea acțiunii în Sistemul Internațional de unități este exprimată în newton (N).

**Newtonul este forța care produce o accelerație egală cu 1 m/s² unui corp în repaus cu masa de un Kg.**

In funcție de modelarea pentru calcul, există două tipuri de acțiuni:

- **încărcări** - acțiuni care pot fi schematizate ca forțe sau momente;
- **alte tipuri de acțiuni** - variații de temperatură, contracția betonului, cedări de reazeme, etc.

**Incărcările se pot clasifica:**

**a.** după **modul de aplicare** pe elementul de construcție:

- **forțe concentrate** (punctuale) - acestea sunt încărcări repartizate pe o porțiune foarte mică din suprafața elementului, înlocuite prin rezultantă *(o încărcare concentrată sau forță care este caracterizată printr-un punct de aplicare, o dreaptă suport, un sens de acțiune şi intensitatea încărcării - intensitatea este exprimată în **N** şi multiplii săi **daN**, **kN**, etc.),* fig.1.28;

- **cupluri (punctuale)** - sunt momente concentrate *(cuplul este caracterizat printr-un punct de aplicație, un sens de acțiune şi o intensitate - intensitatea este exprimată în **Nm** şi multiplii săi **daNm**, **kNm,** etc.),* fig.1.29;

The magnitude of the load in the International System of Units is expressed in Newton (N).

**Newton is the force required to impart an acceleration of 1 m/s$^2$ to a body at rest of mass 1kg.**

Depending on modelling in calculations, there are two types of loads:

- **loads** - actions expressed in terms of forces and moments;
- **other types of actions** - changes in temperature, concrete contraction, settlements, etc.

**Loads can be divided into:**

**a.** depending on **the way in which they are applied** on the structural member:

- **concentrated (point) loads** - they are loads applied over a very small area of the member, being replaced by the resultant (*a point load or force which is defined by a point of application, line of action, sense of application and intensity of the load - the intensity is expressed in **N** and its multiples **daN**, **kN**, etc.*), fig.1.28;

- **couples** - they are couple moments (*the couple is defined by a point of application, sense of application and intensity – the intensity is expressed in **Nm** and its multiples **daNm**, **kNm**, etc.*), fig.1.29;

- **încărcări distribuite** (constante, liniare, parabolice sau după o lege oarecare) - valoarea încărcării se exprimă pe unitatea de arie sau pe unitatea de lungime şi poartă numele de intensitatea încărcării (intensitatea se reprezintă în mod curent prin litera **p** şi se exprimă în unitate de forţă pe unitate de suprafaţă iar pentru elementele liniare, în unitate de forţă pe unitate de lungime - exemple: N/m² sau N/m şi multiplii lor), fig.1.30.

- **distributed loads** (constant, linear, parabolic or any other law of variation) - the magnitude of the load is given per unit of area or unit of length and is called intensity of the load (the intensity is usually represented by the letter **p** and is expressed in unit of force per unit of area or, for linear members, in unit of force per unit of length – examples: N/m² or N/m and their multiples), fig.1.30.

**b.** după **poziţia pe structură:**

- **încărcări fixe;**
- **încărcări mobile** (poduri rulante, vehicule pe drumuri sau pe căile ferate).

**b.** depending on **the position on the structure:**

- **fixed loads**;
- **moving loads** (travelling cranes, vehicles on highways or railways).

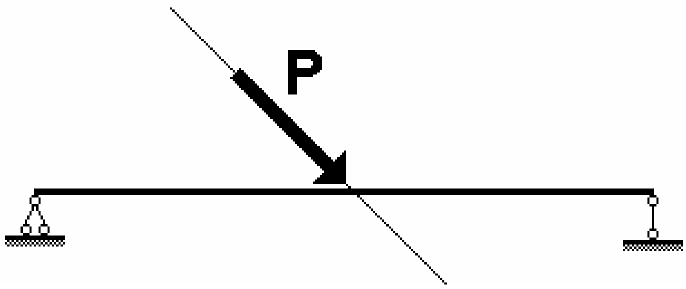



**Fig.1.28**

**Incărcare concentrată - forţă.**

**Point load - force.**

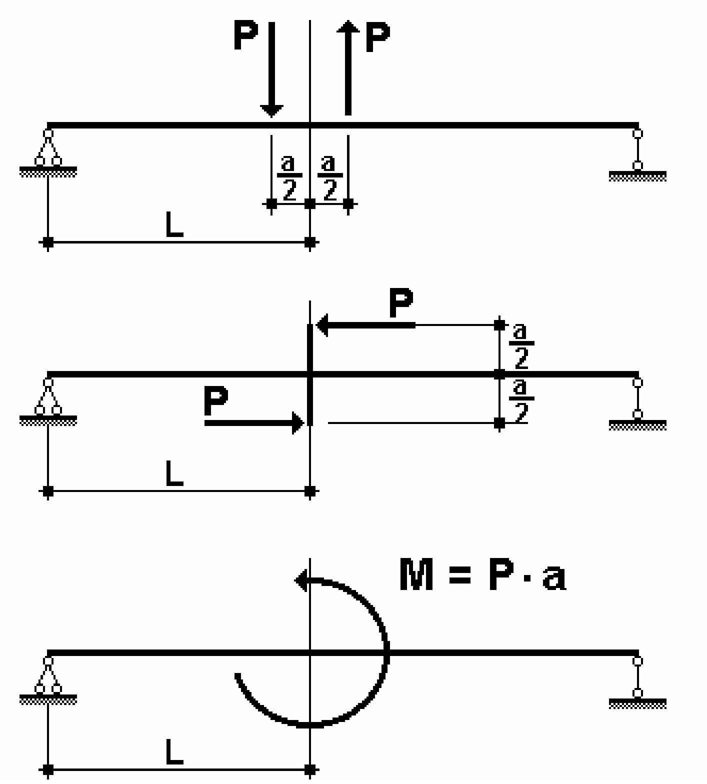



**Fig.1.29**

**Momente concentrate, cupluri.**

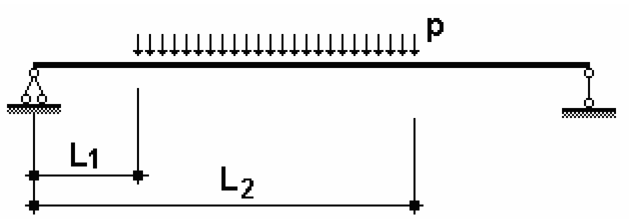
**c.** după **variația intensității** în timp:

- **încărcări statice** - se spune că o încărcare este statică dacă este lentă, continuă și putem neglija forțele de inerție;
- **încărcări dinamice** - sunt încărcări instantanee, în aceste condiții neputându-se neglija forțele de inerție.

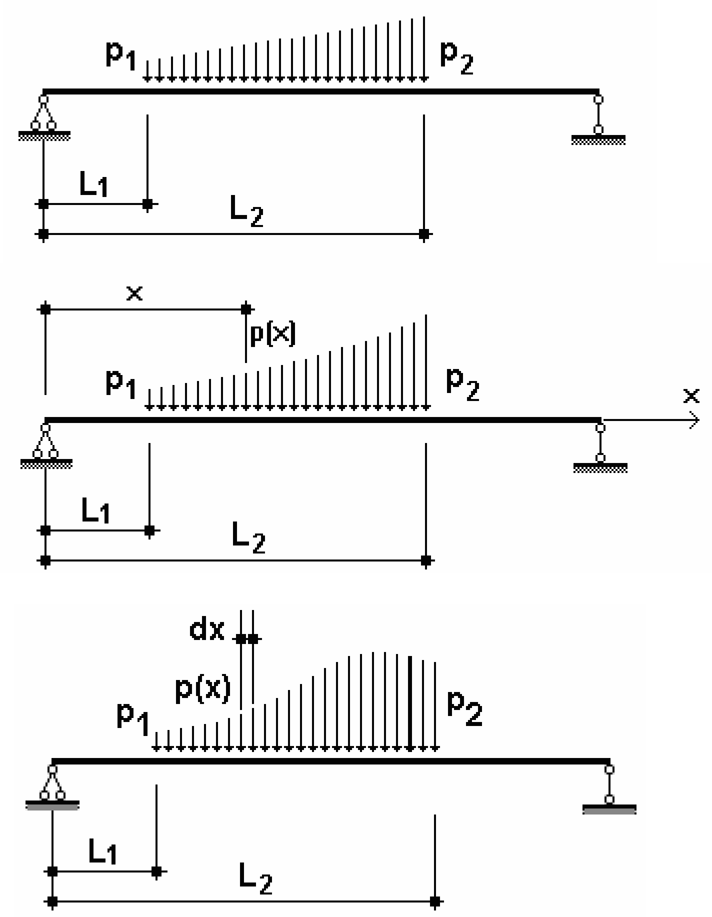
**Couple moments.**

**c.** depending on **the variation of the intensity** with time:

- **static loads** - a load is called static if this is slow, continuous and the inertia forces can be neglected;
- **dynamic loads** - they are instantaneous loads, in this case the inertia forces can not be neglected.




**a.**




b.

c.

d.

**Fig.1.30**

**Incărcări distribuite.**

a. - constant, b. - liniar, c. - parabolic,
d. - după o lege oarecare

**d.** după **elementul pe care acționează:**

- **încărcări directe;**
- **încărcări indirecte.**

O încărcare poate fi descompusă, în raport cu o axă, într-o încărcare simetrică şi o încărcare antisimetrică, fig.1.31. Se poate utiliza principiul suprapunerii efectelor în ceea ce priveşte acțiunile.

**Distributed loads.**

a. - constant, b. - linear, c. - parabolic,
d. - certain law of variation

**d.** depending on **the member on which they are acting:**

- **direct loads**;
- **indirect loads**.

A load can be resolved into a symmetrical load and an antisymmetrical load with regard to an axis, fig.1.31. The principle of the superposition of effects can be used in this case.

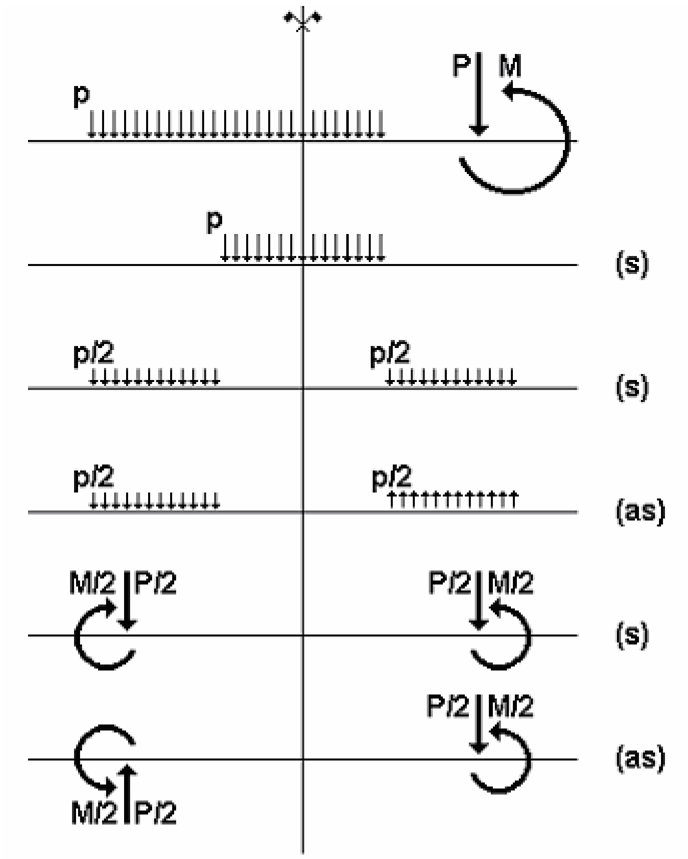



**Fig.1.31**

**Descompunerea încărcărilor în raport cu o axă.**

**Resolution of loads with regard to an axis.**

## 1.4 CONDITII DE ECHILIBRU

Datorită acțiunilor exterioare, în reazemele structurilor apar forțe de legătură (reacțiuni). Pentru a determina aceste mărimi statice, se utilizează două tipuri de ecuații:

- **ecuații de echilibru static** pentru structurile static determinate;
- **ecuații de echilibru static şi ecuații de echilibru elastic** pentru structurile static nedeterminate.

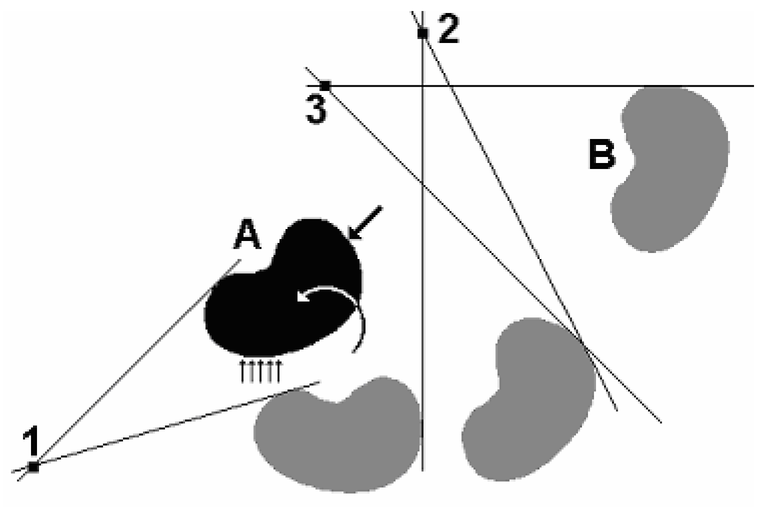
Deplasarea unui sistem plan dintr-o poziție în alta este compusă din trei mişcări. Aceste mişcări pot fi trei rotații sau două translații şi o rotație, fig.1.32.

## 1.4 EQUILIBRIUM CONDITIONS

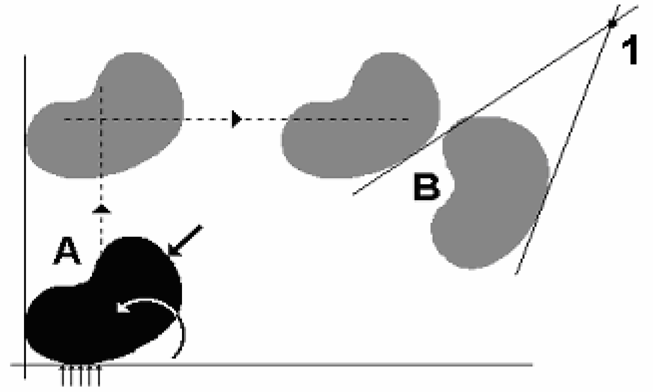
Due to the external loads, reactive forces (reactions) will occur at the supports of the structure. In order to determine these static quantities, two types of equations are used:

- **equations of static equilibrium** for the statically determinate structures;
- **equations of static equilibrium and equations of elastic equilibrium** for the statically indeterminate structures.

The displacement of a plane system from one position to another is composed of three movements. These movements can be three rotations or two translations and one rotation, fig.1.32.




a.




b.

**Fig.1.32**

**Deplasările posibile ale unui sistem.**
a. - prin trei rotații, b. - prin două translații şi o rotație

**Likely displacements of a system.**
a. - through three rotations, b. - through two translations and one rotation

**Observație:**

**O translație este echivalentă cu o rotație în raport cu un punct situat la infinit.**
Pentru a evita deplasarea, este necesar ca rezultanta tuturor acțiunilor (ca forță şi moment) să fie nulă, ceea ce reprezintă tocmai condițiile de echilibru static.

**Pentru structurile plane, echilibrul static poate fi exprimat:**

**a. prin ecuații obişnuite de proiecție sau moment, în trei variante:**

**Note:**

**A translation is equivalent to a rotation with respect to a point located at infinity.**
In order to prevent the displacement, it is necessary that the resultant of all the actions (as force and moment) be zero, which represents the conditions of static equilibrium.

**For plane structures, the static equilibrium can be expressed:**

**a. by usual equations of forces or moment, in three versions:**

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum M_i = 0 \tag{1.5}$$

$$\sum M_i = 0 \qquad \sum M_j = 0 \qquad \sum F_x = 0 \qquad \left(\sum F_y = 0\right) \tag{1.6}$$

$$\sum M_i = 0 \qquad \sum M_j = 0 \qquad \sum M_k = 0 \tag{1.7}$$

unde i, j şi k sunt trei puncte necoliniare;

where i, j and k are three noncollinear points;

**b. utilizând principiul lucrului mecanic virtual:**

**b. by using the virtual work:**

$$\sum F_x \cdot \bar{\delta}x + \sum F_y \cdot \bar{\delta}y + \sum M_i \cdot \bar{\theta}_i = 0 \tag{1.8}$$

unde $\bar{\delta}x, \bar{\delta}y, \bar{\theta}_i$ sunt deplasări virtuale, ceea ce conduce la (1.5);

where $\bar{\delta}x, \bar{\delta}y, \bar{\theta}_i$ are virtual displacements, resulting in (1.5);

**c. grafic - poligonul forțelor şi poligonul funicular să fie închise.**

**c. graphically - the polygon of forces and the funicular polygon have to be closed.**

**Observație:**

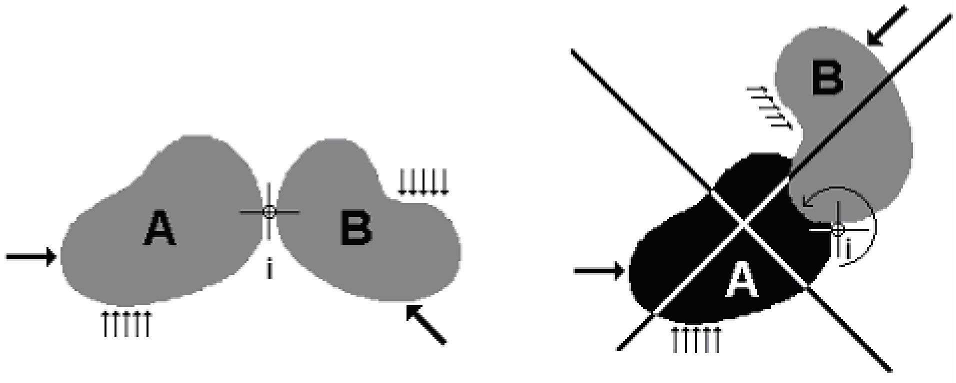
**Ecuațiile de echilibru elastic vor fi analizate la calculul structurilor static nedeterminate.**

**Note:**

**The elastic equations of equilibrium will be studied at the analysis of statically indeterminate structures.**

Dacă sistemul este realizat din elemente legate cu articulații, echilibrul trebuie realizat pe ansamblu şi pentru fiecare subsistem în raport cu celălalt, fig.1.33.

If the system is composed of members connected by pins, the equilibrium has to be achieved for the whole sytem and for each subsystem with regard to each other, fig.1.33.




**a.** **b.**

**Fig.1.33**

**Rotirea relativă între sistemele A şi B nu există dacă ansamblul este în echilibru.**
a.- sistemul, b. - rotirea relativă posibilă

**No relative rotation between subsystems A and B if the whole system is in equilibrium.**
a. - system, b. - likely relative rotation

In acest caz avem următoarea ecuație de echilibru:

In this case, the following equation can be written:

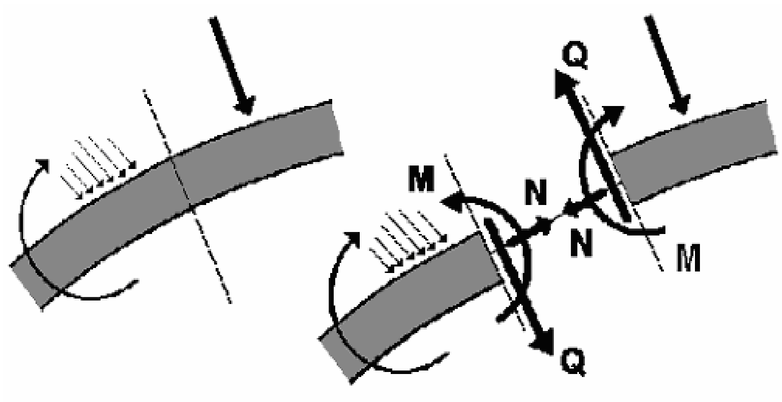
$$\sum M_{i\text{-}B} = 0 \quad \text{sau / or} \quad \sum M_{i\text{-}A} = 0 \qquad \textbf{(1.9)}$$

## 1.5 EFORTURI

Se consideră o bară oarecare, care face parte dintr-o structură plană, încărcată în planul său, fig.1.34.

## 1.5 INTERNAL FORCES

Consider a bar which is part of a plane structure, loaded in its plane, fig.1.34.




a. b.

**Fig.1.34**

**Eforturi.**
a. - o bară, b. - echilibrul tronsoanelor barei

**Internal forces.**
a. - bar, b. - equilibrium of parts of the bar

Ne vom imagina tăierea barei solicitate în două părți, cu ajutorul unui plan perpendicular pe axă. Pentru ca fiecare din aceste părți să se găsească în echilibru sub acțiunea încărcărilor exterioare aplicate, se înlocuieşte efectul părții îndepărtate printr-un sistem de forțe interioare ce acționează pe secțiune, fig.1.35. Aceste forțe se numesc **eforturi**:

The bar is imaginarily cut into two parts by a plane perpendicular to its axis. In order to have the equilibrium of each part under the applied external loads, the effect of the removed part is replaced by a system of internal forces which are acting over the cut cross section, fig.1.35. These forces are called **internal forces**:

**Efortul axial N:** într-o secțiune oarecare a unei bare este egal cu suma algebrică a proiecțiilor pe tangenta la axa barei a tuturor forțelor exterioare (concentrate sau distribuite) ce se găsesc pe bară de o parte a secțiunii considerate.

**Axial force N:** at a certain section of a bar is equal to the algebraic sum of the projections on the tangent to the axis of the bar of all the external forces (concentrated or distributed) acting on the bar, on one side or the other of the considered cross section.

**Forța tăietoare Q:** într-o secțiune oarecare a unei bare este egală cu suma algebrică a proiecțiilor pe normala la tangenta la axa barei a tuturor forțelor exterioare (concentrate sau distribuite) ce se găsesc pe bară de o parte a secțiunii considerate.

**Shear force Q:** at a certain section of a bar is equal to the algebraic sum of the projections on the perpendicular to the tangent to the axis of the bar of all the external forces (concentrated or distributed) acting on the bar, on one side of the considered cross section.

**Momentul încovoietor M:** într-o secțiune oarecare a unei bare este egal cu suma algebrică a momentelor în raport cu centrul de greutate al secțiunii barei ale tuturor forțelor exterioare, ce se găsesc pe bară de o parte a secțiunii considerate.

**Bending moment M:** at a certain section of a bar is equal to the algebraic sum of moments of all the external forces acting on the bar on one side of the considered cross section, with regard to the centroid of the section.

**Observație:**

**Pentru a defini semnul eforturilor, se consideră convenția din fig.1.36, pentru un tronson infinit mic de bară.**

**Note:**

**In order to define the sign of the internal forces, the sign convention shown in fig.1.36 is used for an infinitisimally small element of bar.**

Se consideră un tronson infinit mic dintr-o bară curbă, fig.1.37, având raza de curbură **r**, centrul în **O** şi lungimea **ds**. Acesta este supus la o încărcare oarecare ale cărei rezultante, situate în centrul tronsonului, sunt:

Consider an infinitisimally small element of a curved bar, fig.1.37, having the curvature radius **r**, the center at **O**, the length **ds**. This is subjected to a certain load whose resultants, at the centre of the segment, are:

$p_t \cdot ds$ - pe direcția tangentei la axa barei / in the direction of the tangent to the axis of the bar;

şi /and

$p_n \cdot ds$ - pe direcția normalei la tangenta la axa barei / in the direction of the perpendicular to the tangent to the axis of the bar.

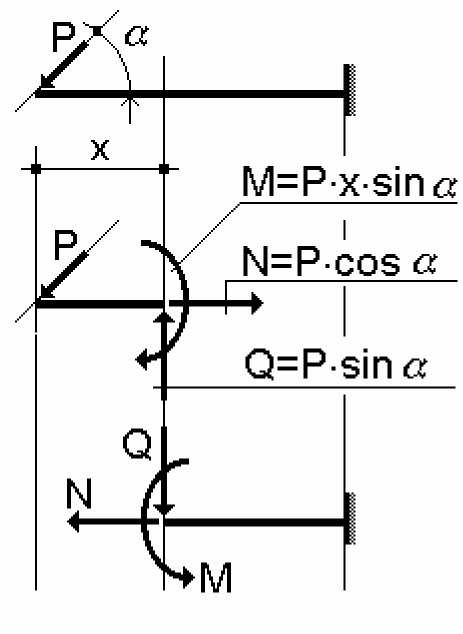



**Fig.1.35**

**Semnificația eforturilor pentru bara dreaptă.**

**Meaning of the internal forces for the straight bar.**

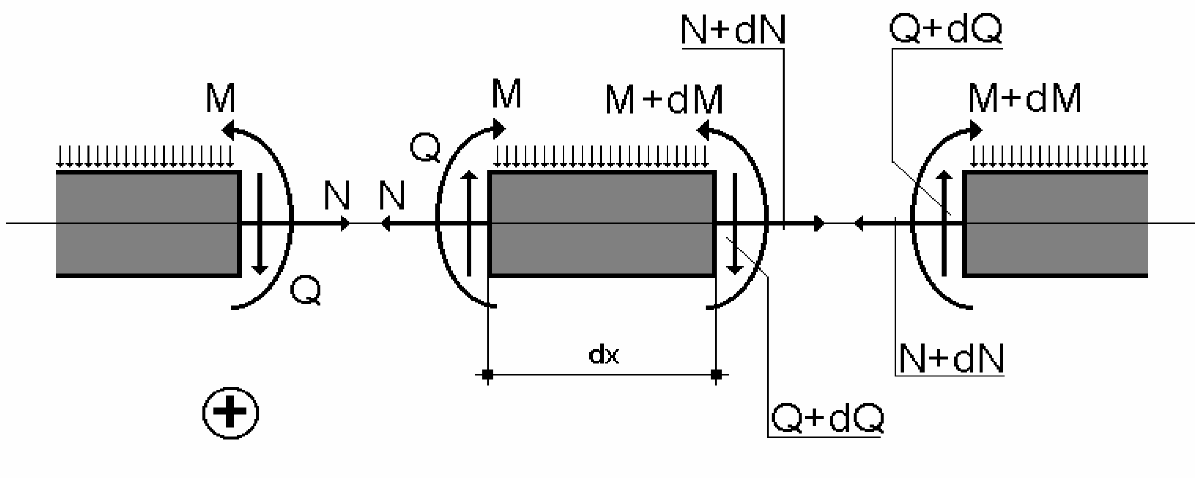



**Fig.1.36**

**Convenția pozitivă a eforturilor.**

**Positive sign convention for the internal forces.**

Unghiul corespunzător la centru, notat cu $\mathrm{d}\omega$, este considerat infinit mic, astfel că:

The corresponding angle at centre, denoted by $\mathrm{d}\omega$, is considered infinitisimally small so that:

$$\sin \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega$$

şi / and

$$\cos \mathrm{d}\omega = 1$$

Pe cele două fețe ale trosonului se consideră efectul părții îndepărtate: N, Q şi M pe fața din stânga şi N+dN, Q+dQ şi M+dM pe fața din dreapta.

The effect of the removed part is considered on the two end sides of the segment: N, Q and M on the left hand side and N+dN, Q+dQ and M+dM on the right hand side.

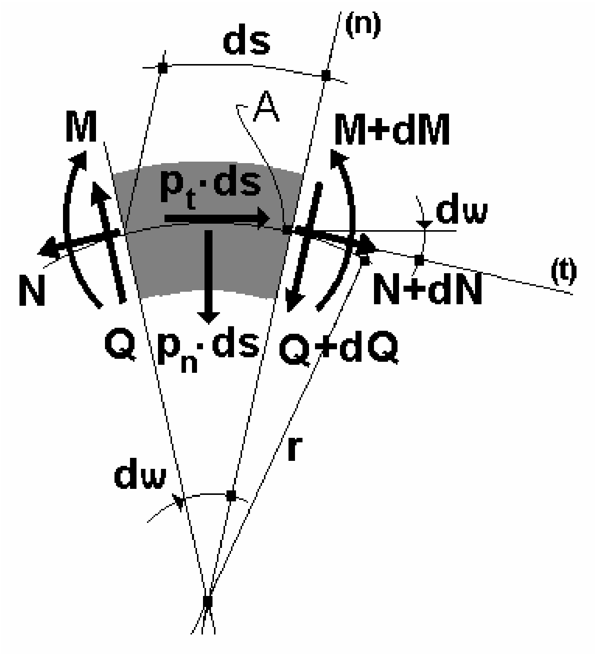



**Fig.1.37**

**Echilibrul unui tronson infinit mic dintr-o bară curbă.**

**Equilibrium of an infinitisimally small element of a curved bar.**

Tronsonul fiind în echilibru, se scriu următoarele ecuații în raport cu punctul A situat pe axa tronsonului:

The segment being in equilibrium, the following equations can be written with regard to point A located on the axis of the segment:

- **suma proiecțiilor pe tangentă în A:**
- **summation of projections on the tangent at A:**

$$N + dN - N \cdot \cos d\omega - Q \cdot \sin d\omega + p_n \cdot ds \cdot \sin\frac{d\omega}{2} + p_t \cdot ds \cdot \cos\frac{d\omega}{2} = 0 \qquad \textbf{(1.10)}$$

- **suma proiecțiilor pe normală în A:**
- **summation of projections on the perpendicular at A:**

$$Q + dQ + N \cdot \sin d\omega - Q \cdot \cos d\omega + p_n \cdot ds \cdot \cos\frac{d\omega}{2} - p_t \cdot ds \cdot \sin\frac{d\omega}{2} = 0 \qquad \textbf{(1.11)}$$

- **suma momentelor în raport cu A:**
- **summation of moments about A:**

$$M + dM - M + N \cdot ds \cdot \sin d\omega - Q \cdot ds \cdot \cos d\omega + p_n \cdot ds \cdot \frac{ds}{2} \cdot \cos\frac{d\omega}{2} - \\ -p_t \cdot ds \cdot \frac{ds}{2} \cdot \sin\frac{d\omega}{2} = 0 \qquad \textbf{(1.12)}$$

Dacă se neglijează infiniţii mici de gradul doi şi se notează $ds = r \cdot d\omega$, atunci relaţiile (1.10), (1.11) şi (1.12) devin:

If the second order terms are neglected and $ds = r \cdot d\omega$, then the relationships (1.10), (1.11) and (1.12) become:

$$\frac{dN}{ds} = -p_t + \frac{Q}{r} \qquad \textbf{(1.13)}$$

$$\frac{dQ}{ds} = -p_n - \frac{N}{r} \qquad \textbf{(1.14)}$$

$$\frac{dM}{ds} = Q \qquad \textbf{(1.15)}$$

Pentru bara dreaptă, cu r tinzând la infinit, se obţin următoarele relaţii diferenţiale:

For the straight bar, with $r$ tending towards infinity, the following differential relationships are obtained:

$$\frac{dN}{dx} = -p_t \qquad \textbf{(1.16)}$$

$$\frac{dQ}{dx} = -p_n \qquad \textbf{(1.17)}$$

$$\frac{dM}{dx} = Q \qquad \textbf{(1.18)}$$

Aceste relaţii permit stabilirea corespondenţei între eforturi şi încărcările exterioare.

These retationships make the connection between the internal loadings and external loads.

## 1.6 DIAGRAME DE EFORTURI

## 1.6 INTERNAL FORCES' DIAGRAMS

Diagramele de eforturi sunt **reprezentarea grafică a variaţiei eforturilor în lungul axei barei.**

The internal forces' diagrams are the **graphical representations of the variation of the internal forces along the axis of the bar.**

Trasarea diagramelor de eforturi poate fi realizată prin definirea funcţiilor eforturilor **N(x), Q(x)** şi **M(x)** pe domeniile care au **aceeaşi lege de variaţie a încărcării.**

The internal loadings' diagrams can be drawn by defining the functions for the internal forces **N(x)**, **Q(x)** and **M(x)** over regions with the **same law of variation of the load**.

Un alt procedeu este **metoda secțiunilor**, care constă în calculul valorilor acestor funcții în extremitățile unor intervale și reprezentarea legii de variație pe aceste intervale în funcție de relațiile diferențiale. Intervalele pot fi domenii care au o lege continuă de variație a încărcărilor sau subintervale ale acestor domenii.

Pentru a trasa diagramele de eforturi pe o bară oarecare a unei structuri care are extremitățile notate (**i, j**), se consideră un sistem de axe **XOY** atașat acesteia. Originea sistemului de axe este situată în (**i**), respectând condiția **i<j**, fig.1.38.

Another method is the **section method,** which consists of the calculation of values of these functions at the end of certain intervals and the drawing of their law of variation over those intervals as a function of the differential relationships.These intervals can be regions that have a continuous law of variation of the loads or subintervals of these regions.

In order to draw the internal forces' diagrams for a certain bar of a structure that has the ends denoted by (**i, j**), a system of axes **XOY,** attached to it, is considered. The origin of the system of axes is located at (**i**), satisfying the condition **i<j**, fig.1.38.

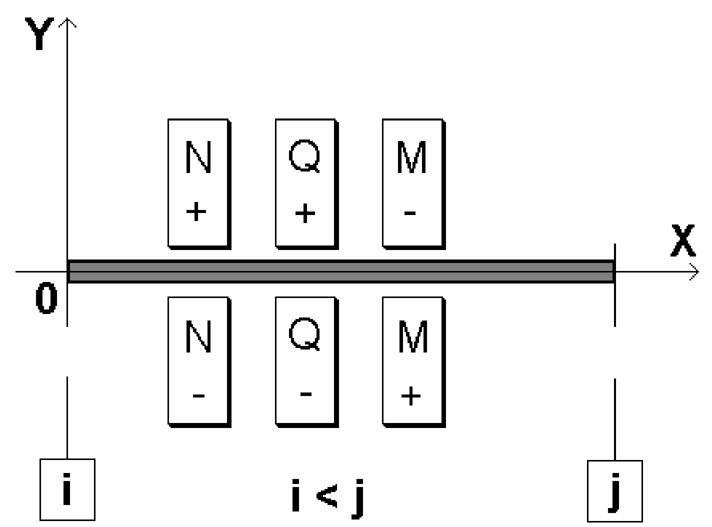



**Fig.1.38**

**Sistemul de axe XOY atașat unei bare și semnul eforturilor.**

**System of axes XOY attached to a bar and the sign of the internal forces.**

**Observație:**

**Se face convenția că diagramele N și Q pozitive sunt trasate în cadranul y pozitiv și diagramele negative în cadranul y negativ, fig.1.38, iar diagramele de moment sunt trasate pentru valorile pozitive în cadranul y negativ și valorile negative în cadranul y pozitiv, pe partea fibrei intinse a barei, fig.1.38.**

**Note:**

**We make the convention that the positive N and Q diagrams are drawn in the positive y quatrant and the negative diagrams in the negative y quatrant, fig.1.38, while the positive values of the bending moment diagrams are drawn in the negative y quatrant and the negative values in the positive y quatrant, on the tensile side of the bar, fig.1.38.**

Analizând structura prezentată în fig.1.39, rezultă că pentru diagramele de moment încovoietor nu este necesar semnul.

From the analysis of the structure in fig.1.39, it can be noticed that the sign of the bending moment diagram is not required.

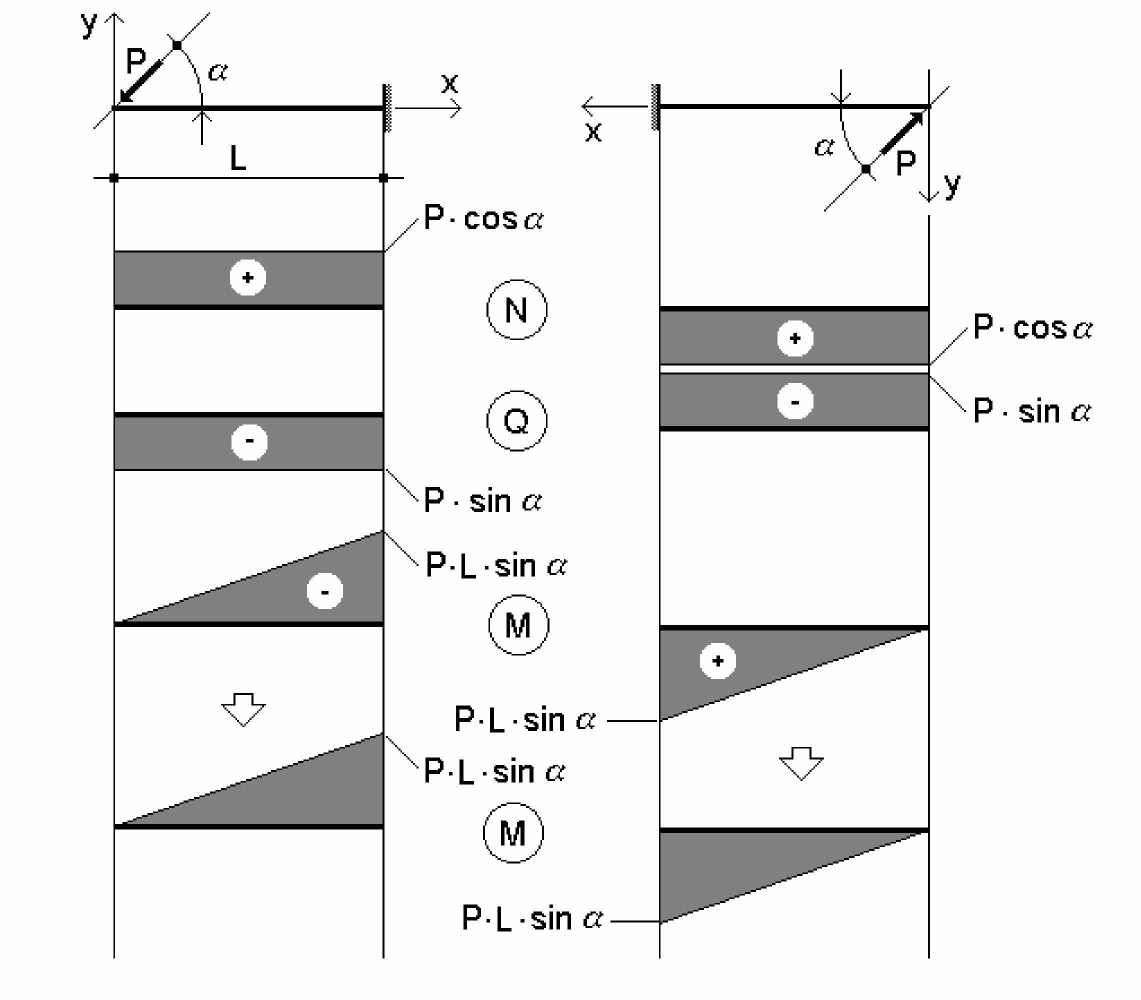



**Fig.1.39**

**Semnul diagramelor de eforturi.**

**Sign of the internal forces' diagrams.**

Pentru structurile static determinate, simetrice în raport cu încărcările şi tipurile de legături, diagramele de forță tăietoare sunt antisimetrice iar diagramele de moment încovoietor sunt simetrice, fig.1.40.

For the statically determinate structures, symmetrical with regard to the loads and types of supports, the shear force diagrams are antysymmetric and the bending moment diagrams are symmetric, fig.1.40.

Pentru structurile static determinate, simetrice în raport cu legăturile dar antisimetrice în raport cu încărcările, diagramele de forță tăietoare sunt simetrice iar diagramele de moment încovoietor sunt antisimetrice, fig.1.41.

For the statically determinate structures, symmetrical with regard to the supports but antisymmetric with respect to the loads, the shear force diagrams are symmetric and the bending moment diagrams are antisymmetric, fig.1.41.

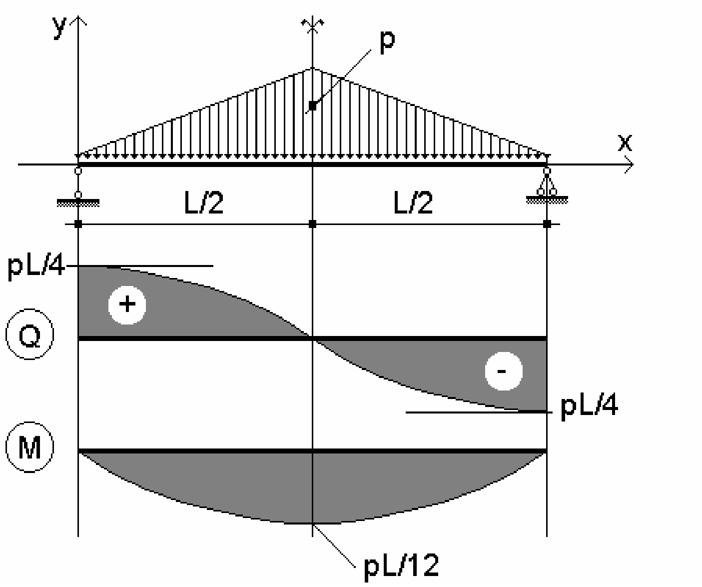



**Fig.1.40**

**Diagrame de eforturi pentru acțiuni simetrice.**

**Internal forces' diagrams for symmetric loads.**

Plecând de la definiția lui Q, rezultă că, într-o secțiune unde este aplicată o forță concentrată, diagrama de forță tăietoare trebuie să aibă un salt de discontinuitate de aceeaşi mărime cu această forță, fig.1.41.

Starting from the definition of Q, at a section with a point force, the shear force diagram must have a sudden change in value equal to the magnitude of that force, fig.1.41.

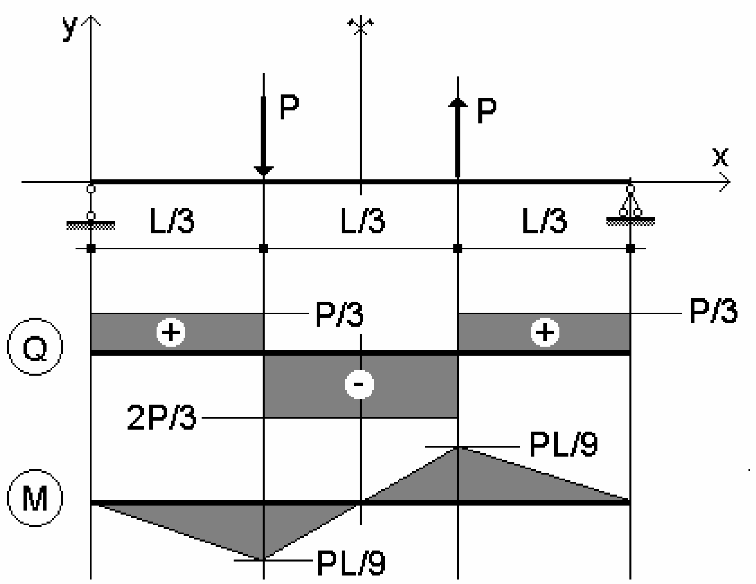



**Fig.1.41**

**Diagrame de eforturi pentru acțiuni antisimetrice.**

**Internal loadings diagrams for antisymmtric loads.**

Plecând de la definiția lui M, rezultă că, într-o secțiune supusă la un cuplu, diagrama de moment încovoietor trebuie să aibă un salt de discontinuitate de aceeaşi marime cu a momentului concentrat, fig.1.42.

Starting from the definition of M, at a section with a moment, the bending moment diagram must have a sudden change in value equal to the magnitude of that moment, fig.1.42.

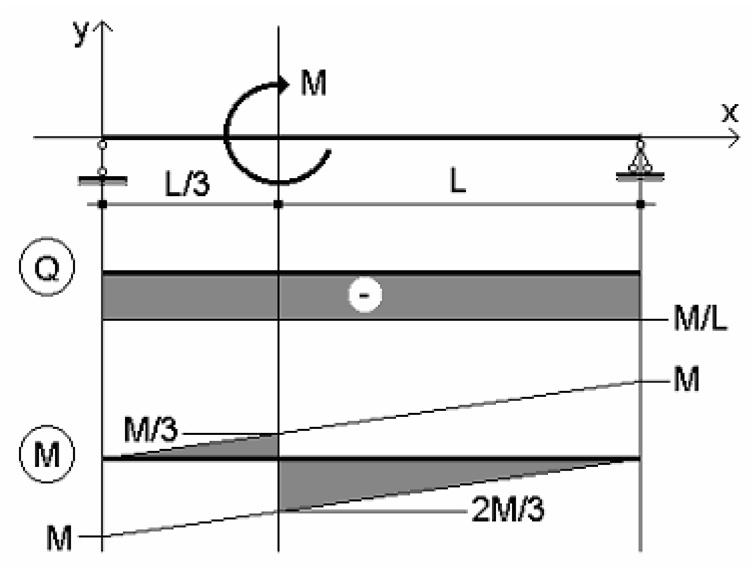



**Fig.1.42**

**Diagrame de eforturi pentru un moment concentrat.**

**Internal forces' diagrams for a concentrated moment.**

Pentru elementele cu axa dreaptă, nesupuse la cupluri distribuite care produc încovoiere, construcția diagramelor Q şi M, la fel ca şi controlul corectitudinii lor, se efectuează cu ajutorul relațiilor diferențiale (1.17) şi (1.18) între **M**, **Q** şi **p** şi al consecințelor care rezultă din acestea:

For members with straight axis, which are not subjected to distributed moments that produce bending, the drawing and check of Q and M diagrams are carried out using the differential relationships (1.17) and (1.18) between **M**, **Q** and **p** and their relationships:

$$\frac{dM}{dx} = Q \qquad \textbf{(1.19)}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = -p \qquad \textbf{(1.20)}$$

**Principalele observații care rezultă din relațiile (1.19) şi (1.20):**

- geometric, forța tăietoare este interpretată ca tangenta unghiului format de tangenta la diagrama de moment încovoietor la nivelul secțiunii considerate cu axa x a elementului;

**The main corollaries that result from (1.19) and (1.20) are:**

- the shear force is geometrically interpreted as the tangent of the angle formed by the tangent to the bending moment diagram at the considered section and the x axis of the member ;

- intensitatea încărcării este interpretată ca tangenta unghiului format de această axă cu tangenta la diagrama de forță tăietoare;
- dacă forțele care descriu variația încărcării distribuite sunt funcții algebrice pe fiecare porțiune a elementului, gradul funcției forței tăietoare este superior cu o unitate față de gradul funcției încărcării distribuite pe aceeaşi zonă a elementului iar gradul funcției moment este mai mare cu o unitate față de gradul funcției forță tăietoare (vezi tab.1);
- în secțiunile elementului unde forța tăietoare este nulă, momentul încovoietor are o valoare extremă, tangenta la această diagramă fiind paralelă la axa şi în secțiunea unde forța tăietoare trece prin zero discontinuu, diagrama de moment încovoietor îşi schimbă alura monotonă;
- în secțiunea elementului unde diagrama de forță tăietoare are un salt, diagrama de moment încovoietor are un punct de schimbare a pantei;
- dacă pe toată lungimea elementului sau pe o porțiune a acestuia diagrama de forță tăietoare este antisimetrică, pe aceeaşi zonă diagrama de moment încovoietor este simetrică şi invers;
- concavitatea diagramei curbilinii de moment încovoietor este îndreptată în sensul intensității încărcării.

**Etapele de calcul al structurilor static determinate sunt următoarele:**

i. **analiza statică a structurii;**

ii. **descompunerea în structuri simple** (în cazul unei structuri compuse) şi realizarea schemei statice a structurii sau a modelului de calcul;

- the intensity of the load is interpreted as the tangent of the angle formed by the x axis of the member and the tangent to the shear force diagram;
- if the forces which describe the variation of the distributed load are algebraic functions on each region of the member, the shear force function is one order higher than the distributed load function over the same zone of the member and the bending moment function is one order higher than the shear force diagram, (see Table.1);
- at the sections of the member where the shear force is zero, the bending moment has an extreme value, the tangent to this diagram being parallel to the axis; at the section where the shear force passes discontinuously through zero, the bending moment diagram changes its monotonous shape;
- at the section of the member where the shear force diagram has a sudden change in value, the bending moment diagram has a point with a change in the slope;
- if the shear force diagram is antisymmetric over the entire length of the member or over a region of the member, the bending moment diagram is symmetric over the same zone and vice-versa;
- the concavity of the bending moment diagram is in the sense of the intensity of the load.

**The steps for the analysis of a statically determinate structure are:**

i. **static analysis of the structure;**

ii. **division in simple structures (**in the case of a compound structure) and identification of the structural scheme or model**;**

iii. **calculul reacțiunilor sau al forțelor de legătură** - se utilizează de obicei ecuațiile de echilibru static;

iv. **calculul eforturilor;**

v. **reprezentarea diagramelor de eforturi;**

vi. **verificarea diagramelor** - îndeplinirea relațiilor diferențiale şi a consecințelor acestora (tabelul 1), compatibilitatea între diagramele de eforturi şi legăturile interioare şi exterioare ale structurii, echilibrul nodurilor, echilibrul prin lucru mecanic virtual.

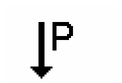
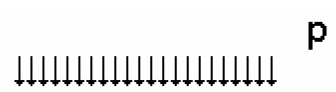
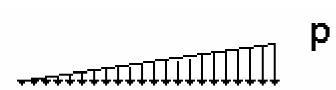
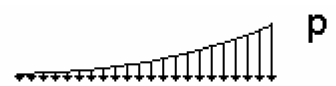
iii. **calculation of reactions or reactive forces** - static equilibrium equations are usually used**;**

iv. **calculation of the internal loadings**

v. **drawing of the internal forces' diagrams;**

vi. **verifications of diagrams -** satisfaction of the differential relationships and their consequences (Table 1), the compatibility between the internal forces' diagrams and internal and external connections of the structure, joint equilibrium, virtual work equilibrium.

**Tabel / Table 1**

| **INCARCARE / LOAD** | **p(x)** | **Q(x)** | **M(x)** |
|---|---|---|---|
|   | **0** | **constant / constant** | **f(x)** |
|   | **constant / constant** | **f(x)** | **f($x^2$)** |
|   | **f(x)** | **f($x^2$)** | **f($x^3$)** |
|   | **f($x^2$)** | **f($x^3$)** | **f($x^4$)** |

In fig. 1.43 ... 1.51 sunt prezentate diagramele de eforturi pentru câteva tipuri de grinzi cu diverse încărcări.

Figures 1.43 ... 1.51 show the internal forces' diagrams for certain types of beams subjected to different loads.

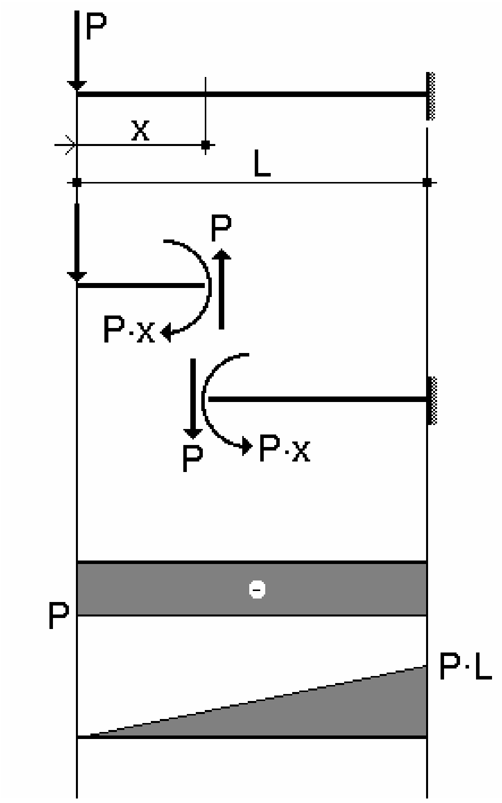



Fig.1.43

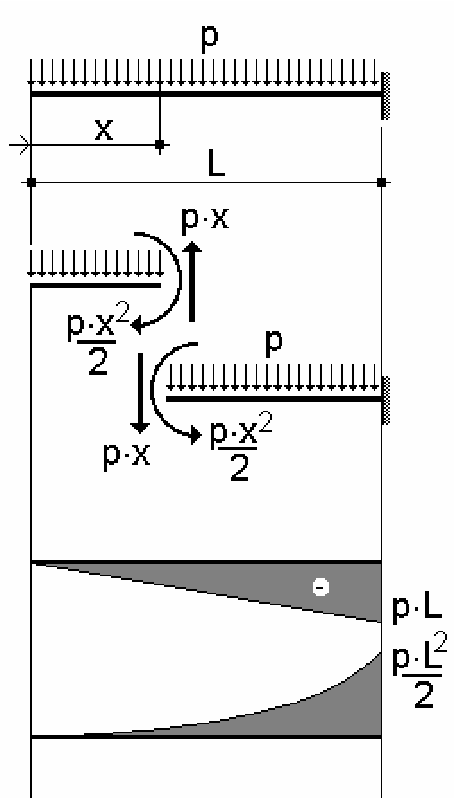



Fig.1.44

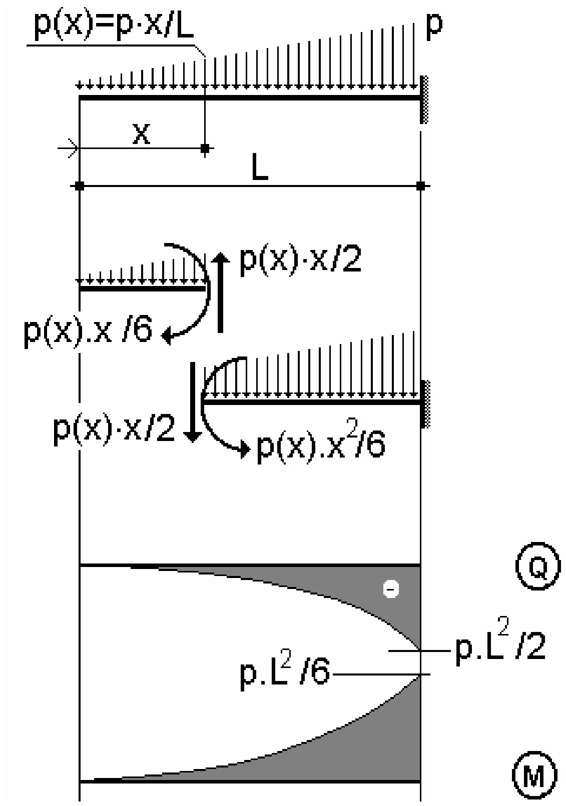



Fig.1.45

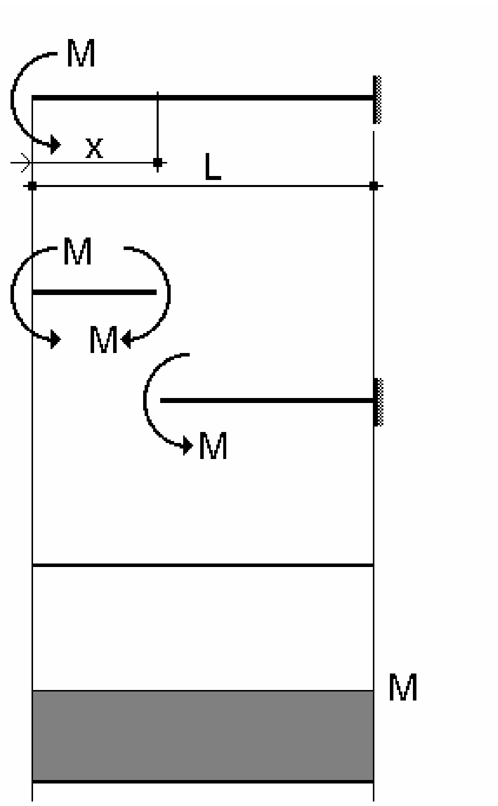



Fig.1.46

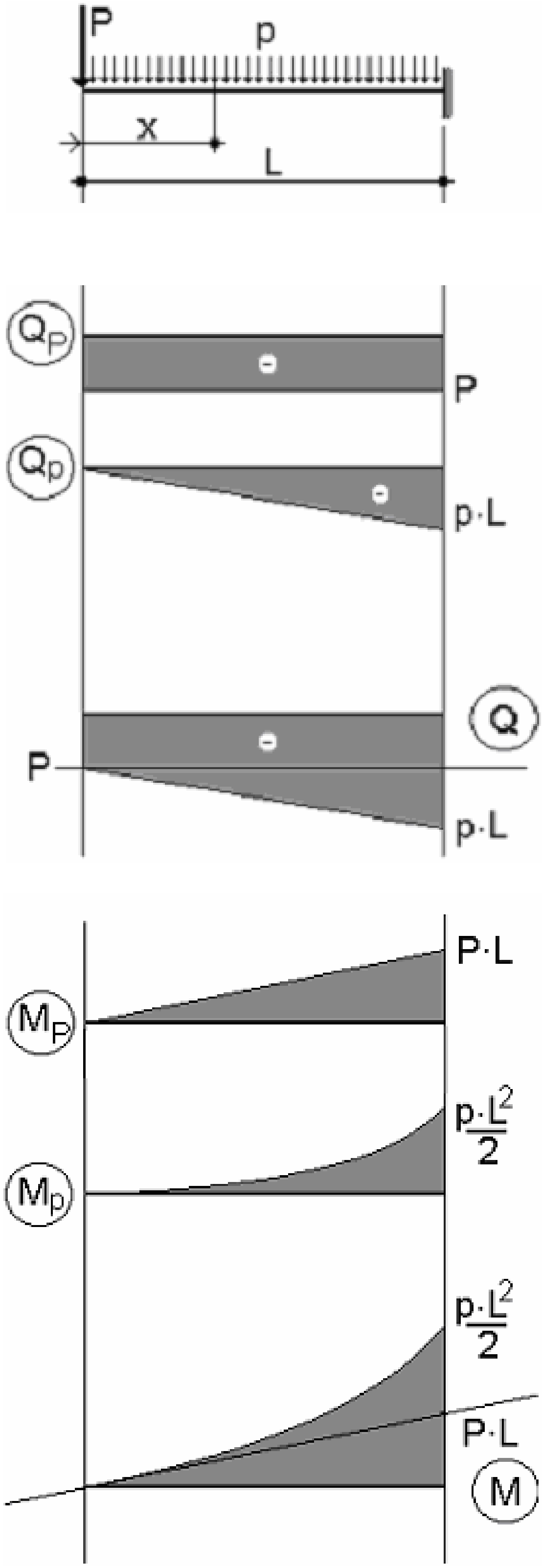
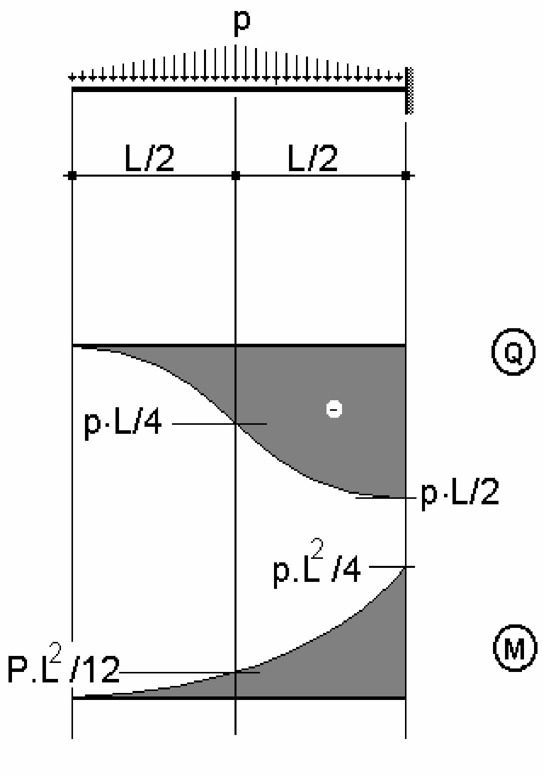



**Fig.1.47**



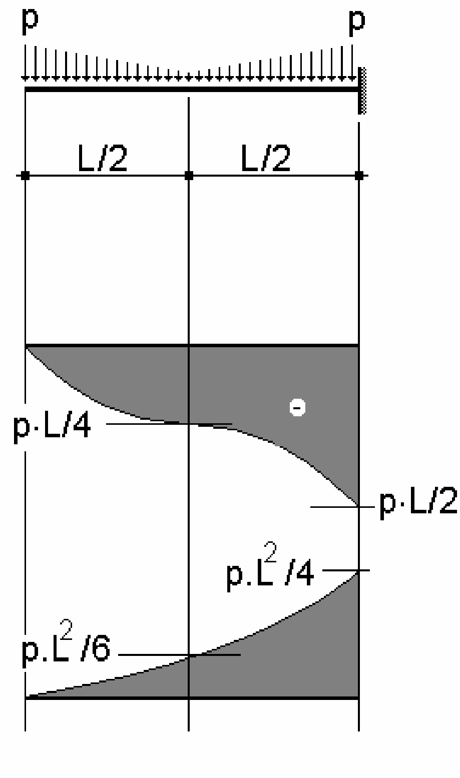
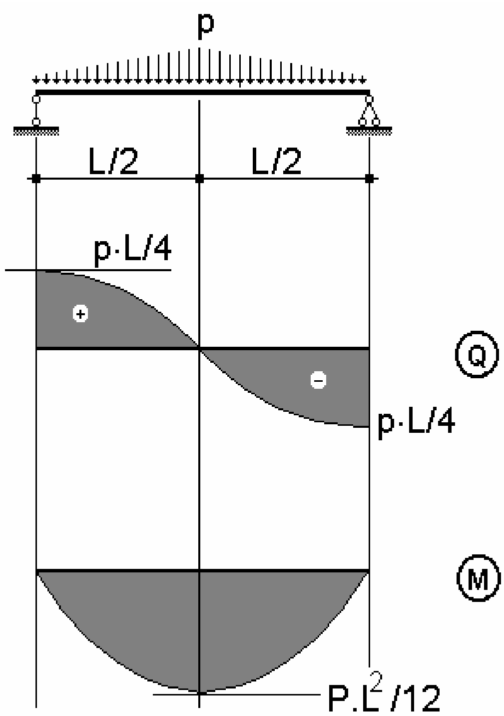




**Fig.1.48** **Fig.1.49**



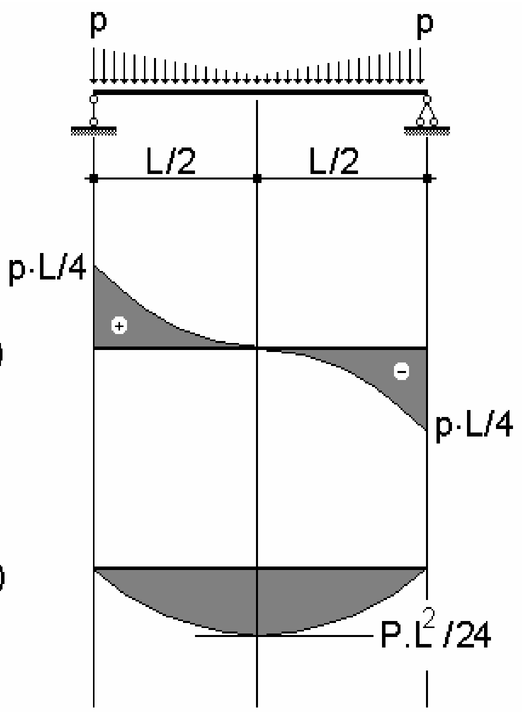




**Fig.1.50** **Fig.1.51**

## 1.7 SCURT ISTORIC

Stadiul actual al cunoştinţelor în domeniul Mecanicii construcţiilor reprezintă rezultatul activităţii de mai multe secole a numeroşi ingineri, cercetători şi alţi specialişti. Aceasta se datorează dezvoltării Matematicii aplicate la problemele de calcul al elementelor şi structurilor de rezistenţă, ca şi experienţei acumulate în proiectarea şi tehnologiile de execuţie a lucrărilor pentru diverse tipuri de construcţii.

Incepând cu primele reguli elaborate de Léonardo da Vinci (1452-1519) privind rezistenţa grinzilor, remarcabile contribuţii au fost aduse succesiv de: Galileo Galilei, Robert Hooke, J. Bernoulli, M.V. Lomonosov, L. Euler, C.A. Coulomb, J.L. Lagrange, L. Navier, P.E. Clapeyron, E. Betti, J.C. Maxwell, O. Mohr, A. Castigliano, L. Cremona etc.

In calculul propriu-zis al structurilor au adus contribuţii importante: S. Timoshenko, H. Müller-Breslau, A. Vierendeel, H. Cross, I.P. Prokofiev, A.F. Smirnov şi apoi L. Grinter, O.H. Pilkey, Von Haller, R. Kranl, G. Kani, P.Csonka, V. Dasek, F. Stüssi, A.V. Darkov, J. Courbon, P. Charon etc. ,ca şi J.F. Baker, B.G. Neal, M.R. Horne, J. Heyman, J.D. Foulkes, L.S. Beedle, P.G. Hodge, Ch. Massonnet etc., ultimii în domeniul calculului postelastic al structurilor.

In ţara noastră, dezvoltarea teoriei şi practicii construcţiilor este legată de activitatea ştiinţifică şi didactică a numeroşi specialişti, dintre care majoritatea au fost şi profesori: **A. Saligny** (1854-1925), **Elie Radu** (1853-1931), **A.G. Ioachimescu** (1868-1943), **Ion Ionescu** (1870-1946), **Gh.E. Filipescu** (1882-1947) iar în ultimile decenii **A.A. Beles, C.C. Teodorescu, M. Hangan, St. Balan, A. Sesan, C. Avram, P. Mazilu, Al. Gheorghiu, D. Mateescu, Al. Negoita,** etc.

## 1.7 HISTORICAL REVIEW

The actual level of knowledge in the Structural Mechanics field is the result of the work carried out for centuries by numerous engineers, researchers and other scientists. This is due to developments in the Applied Mathematics and their use in the analysis of members and structures and due to experience aquired in the design and construction technology of works for different types of constructions.

Starting from the first rules developed by Léonardo da Vinci (1452-1519) regarding the strength of beams, remarcable contributions were successively made by: Galileo Galilei, Robert Hooke, J. Bernoulli, M.V. Lomonosov, L. Euler, C.A. Coulomb, J.L. Lagrange, L. Navier, P.E. Clapeyron, E. Betti, J.C. Maxwell, O. Mohr, A. Castigliano, L. Cremona etc.

In the analysis of structures, important contributions were brought by: S. Timoshenko, H. Müller-Breslau, A. Vierendeel, H. Cross, I.P. Prokofiev, A.F. Smirnov et puis L. Grinter, O.H. Pilkey, Von Haller, R. Kranl, G. Kani, P.Csonka, V. Dasek, F. Stüssi, A.V. Darkov, J. Courbon, P. Charon etc. , ainsi que J. F. Baker, B.G. Neal, M.R. Horne, J. Heyman, J.D. Foulkes, L.S. Beedle, P.G. Hodge, Ch. Massonnet etc., the last ones in the postelastic analysis of structures.

In our country, the development of the theory and practice in construction is linked to the scientific and teaching activity of numerous engineers, the majority of them being also professors: **A. Saligny** (1854-1925), **Elie Radu** (1853-1931), **A.G. Ioachimescu** (1868-1943), **Ion Ionescu** (1870-1946), **Gh.E. Filipescu** (1882-1947), and in the last decades **A.A. Beles**, **C.C. Teodorescu**, **M. Hangan**, **St. Balan**, **A. Sesan**, **C. Avram**, **P. Mazilu**, **Al. Gheorghiu**, **D. Mateescu**, **Al. Negoita,** etc.

Astăzi, în centrele universitare Bucureşti, Iaşi, Cluj şi Timişoara, există puternice şcoli superioare cu o tradiție prestigioasă în domeniul calculului şi execuției construcțiilor, care pregătesc specialişti pentru toate activitățile din acest sector important al societății actuale şi viitoare.

Nowadays, at Bucharest, Iasi, Cluj and Timisoara university centres, there are strong schools with a well-known tradition in the analysis of structures and execution in constructions. They are training specialists for all the activities in this important sector of the present and future society.

# 2

# EFORTURI
# STRUCTURI STATIC DETERMINATE
## INCARCARI FIXE

# INTERNAL FORCES
# DETERMINATE STRUCTURES
## FIXED LOADS

Geometria unei structuri compuse din bare poate fi exprimată astfel:

The geometry of a structure composed of bars can be expressed as follows :

- **explicit / explicitly:**

$$\begin{aligned} y &= F(x) \\ r &= F(\omega( \end{aligned} \qquad (2.1)$$

- **implicit / implicitly:**

$$\begin{aligned} F(x,y) &= 0 \\ F(r,w) &= 0 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

- **parametric / parametrically:**

$$\begin{aligned} x &= x(C) \;\; ; \;\; y = y(C) \\ r &= r(C) \;\; ; \;\; \omega = \omega(C) \end{aligned} \qquad (2.3)$$

unde (fig.2.1):

**x** şi **y** sunt coordonatele într-un sistem de axe XOY, ataşat ansamblului;

**r** şi ω sunt raza şi respectiv unghiul în cazul coordonatelor polare;

**C** este un parametru.

In fig.2.2 este indicată reprezentarea explicită şi implicită a unui arc parabolic.

where (fig.2.1):

**x** and **y** are the coordinates in a coordinate system XOY, attached to the structure;

**r** and ω are the radius and the angle in polar coordinates, respectively;

**C** is a parameter.

Figure 2.2 shows the explicit and implicit representation of a parabolic arch.

In fig.2.3 este indicată reprezentarea explicită a unui arc de cerc în coordonate polare.

Figure 2.3 shows the explicit representation of an arc of a circle in polar coordinates.

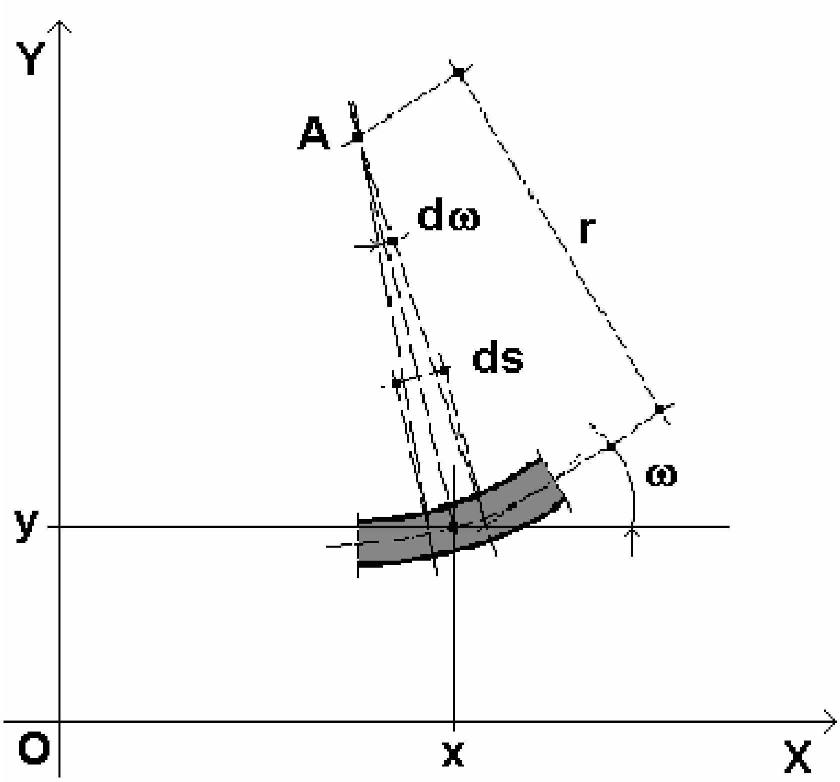
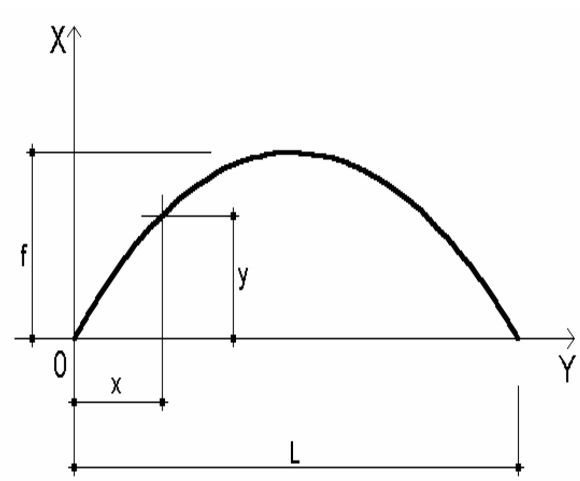



**Fig.2.1**

**Reprezentarea geometrică a unei bare.** **Geometrical representation of a bar.**




explicit / explicite:

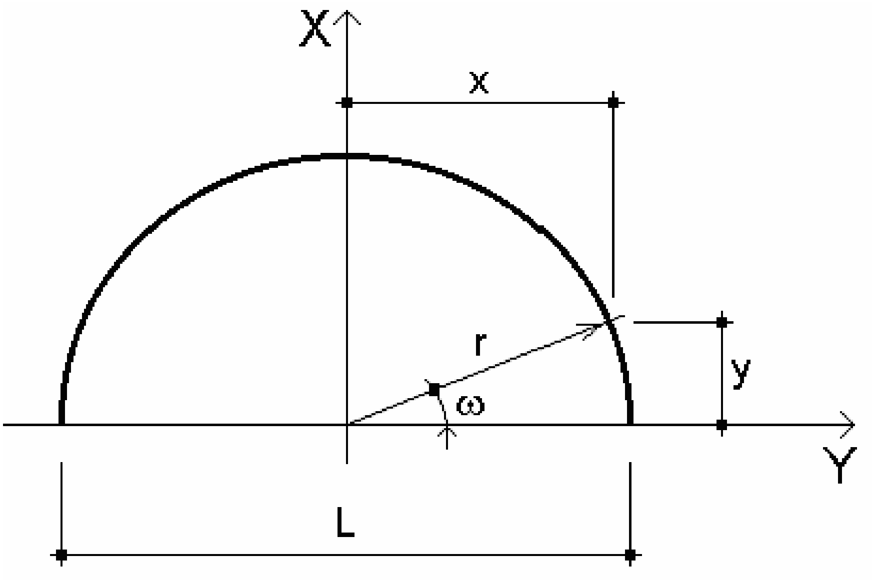
$$\mathbf{y = \frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x(L - x)}$$

implicit / implicite:

$$\mathbf{\frac{4 \cdot f}{L} \cdot x - \frac{4 \cdot f}{L^2} \cdot x^2 - y = 0}$$

**Fig.2.2**

**Reprezentarea explicită şi implicită a unui arc parabolic.** **Explicit and implicit representation of a parabolic arch.**




**explicit / explicite:**

$$\mathbf{x = r \cdot \cos\omega}$$

$$\mathbf{y = r \cdot \sin\omega}$$

$$\mathbf{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\mathbf{\omega = atg(y/x)}$$

**Fig.2.3**

**Reprezentarea explicită a unui arc de cerc în coordonate polare.**

**Explicit representation of an arc of a circle in polar coordinates.**

Reprezentarea parametrică a unui cadru este realizată în fig.2.4. Această modalitate de reprezentare este frecvent utilizată în calculul structurilor.

Figure 2.4 shows the parametric representation of a frame. This representation is frequently used in the structural analysis.

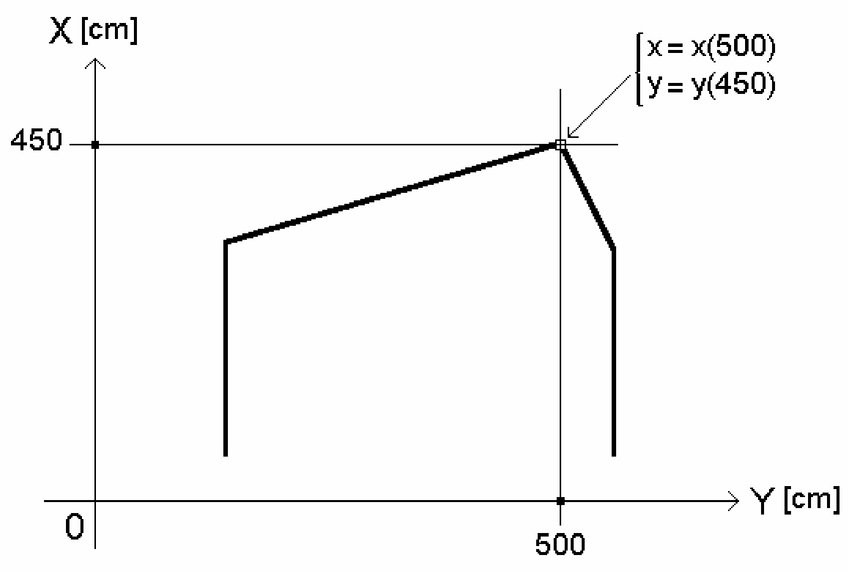



**Fig.2.4**

**Reprezentarea parametrică a unui cadru.**

**Parametric representation of a frame.**

Se consideră un sistem de axe **XOY** ataşat unei structuri. In fiecare punct **k** al unei bare oarecare se poate ataşa un sistem de axe **xoy**, unde axele sunt dirijate pe direcţia tangentei şi normalei la tangentă în punctul respectiv, fig.2.5. Vom nota cu **ω** unghiul între axa **OX** şi **ox**.

Consider a coordinate system **XOY** attached to a structure. A coordinate system **xoy** can be attached to each point **k** of a bar, where the axes of this system are orientated in the direction of the tangent and the perpendicular to the tangent to that point, fig.2.5. The angle between the axis **OX** and **ox** is denoted by **ω.**

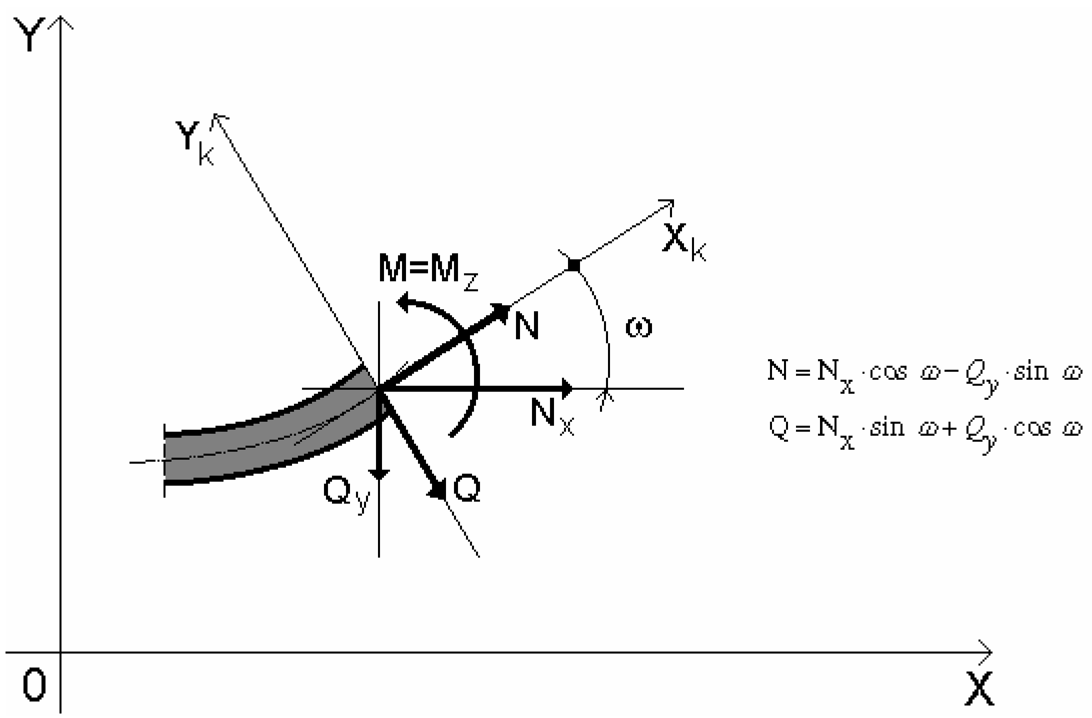



**Fig.2.5**

**Sistemul de axe xoy ataşat într-un punct k a unei bare.**

**Coordinate system xoy attached to a point k of a bar.**

Vom nota de asemenea:

The following notations are also made:

$$\{e\}_k = \{N, Q, M\}_k \qquad (2.4)$$

vectorul eforturilor în secţiunea **k**, în sistemul de axe **xoy** şi:

the vector of the internal forces at the section **k** in the coordinate system **xoy** and:

$$\{E\}_k = \{N_x, Q_y, M_z\}_k \qquad (2.5)$$

vectorul componentelor eforturilor, raportate la sistemul de axe **XOY** în aceeaşi secţiune.

the vector of the components of the internal forces, with regard to the coordinate system **XOY** at the same section.

Intre aceşti doi vectori există relaţiile următoare:

The following relationships exist between these two vectors:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ Q_y \\ M_z \end{Bmatrix} = [t]_{ko} \cdot \begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ Q \\ M \end{Bmatrix} = [t]_{ok} \cdot \begin{Bmatrix} N_x \\ Q_y \\ M_z \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

unde:

where:

$$[t]_{ko} = \begin{bmatrix} \cos\omega & \sin\omega & 0 \\ -\sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

se numeşte **matricea de transformare unghiulară** a eforturilor din sistemul local de axe **xoy** în sistemul general **XOY** şi:

is called the **angular transformation matrix** of the internal forces in the local coordinate system **xoy** into the global coordinate system **XOY** and:

$$[t]_{ok} = \begin{bmatrix} \cos w & -\sin w & 0 \\ \sin w & \cos w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

reprezintă **matricea de transformare unghiulară** a eforturilor din sistemul general **XOY** în sistemul local **xoy.** Intre matricile (2.8) şi (2.9) există relaţia:

represents the **angular transformation matrix** of the internal forces in the global coordinate system **XOY** into the local one **xoy**. Between the matrices (2.8) and (2.9) exists the relationship:

$$\begin{aligned} \{t\}_{ko} &= \{t\}_{ok}^{T} \\ \{t\}_{ok} &= \{t\}_{ko}^{T} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Una este transpusa celeilalte.

One is the transpose of the other.

Cu ajutorul matricei de transformare putem determina eforturile în toate secţiunile unei structuri, dacă cunoaştem componentele eforturilor în secţiunile respective, raportate la sistemul general de axe **XOY**.

By using the transformation matrix, the internal forces at all the sections of a structure can be calculated, provided that the components of the internal forces at those sections, with respect to the global coordinate system **XOY,** are known.

## 2.1 GRINZI INCLINATE

Există situații unde grinzile nu au axa orizontală dar inclinată sub un unghi oarecare ω. Alte componente, reazemele şi încărcările pot avea de asemenea orientări diferite în plan.

In fig.2.6 sunt prezentate orientarile posibile ale unei grinzi, reazemele şi încărcările.

## 2.1 INCLINED BEAMS

There are situations when the beams don't have a horizontal axis but an inclined one at a certain angle ω. Other components, supports and loads can also have different orientations in plane.

Figure 2.6 shows the likely orientations of a beam, the supports and the loads.

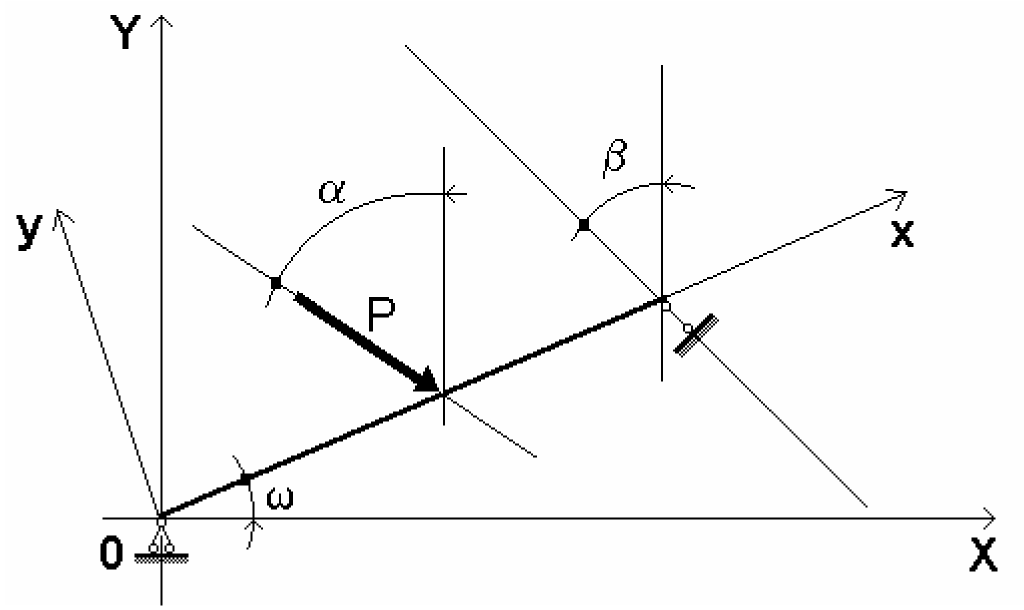



**Fig.2.6**

**Grindă înclinată.** **Inclined beam.**

Determinarea reacțiunilor şi reprezentarea diagramelor de eforturi nu prezintă diferențe importante în raport cu cele ale grinzilor orizontale.

**Etapele de calcul pentru o grindă înclinată sunt următoarele:**

- se înlocuiesc reazemele prin forțele de legătură corespunzătoare;
- se scriu ecuațiile de echilibru pentru a calcula reacțiunile;

The calculation of the reactions at supports and the representation of internal forces' diagrams are not too different from those obtained for the horizontal beams.

**The steps in the analysis of an inclined beam are the following:**

- the supports are replaced by the corresponding reactions:
- the equations of equilibrium are written in order to calculate the reactions;

- se verifică forțele de legătură prin alte ecuații de echilibru, de obicei ecuațiile de proiecție pe direcțiile axelor **OX** şi **OY**;

- pentru grinzile încărcate cu forțele exterioare şi forțele de legătură, vom scrie expresiile eforturilor şi vom reprezenta diagramele de eforturi;

- vom verifica diagramele de eforturi utilizând relațiile diferențiale.

In exemplele următoare vom ilustra etapele de calcul pentru determinarea reacțiunilor, calculul şi reprezentarea diagramelor de eforturi.

- the reactions are checked through other equations of equilibrium, usually by writing equations of force equilibrium in the **OX** and **OY** direction;

- for the beams subjected to external forces and reactions, the expressions of the internal forces are written and the internal forces' diagrams are drawn;

- the internal forces' diagrams are checked by using the differential relationships.

The steps for the calculation of reactions, calculation and drawing of internal forces' diagrams are presented in the following examples.

**Exemplu / Example 2.1**

Să se determine starea de eforturi pentru grinda inclinată din fig.2.7, solicitată de o încărcare uniform distribuită, normală pe axa barei.

Determine the internal forces in the inclined beam shown in fig.2.7, subjected to a uniformly distributed load, perpendicular to the axis of the beam.

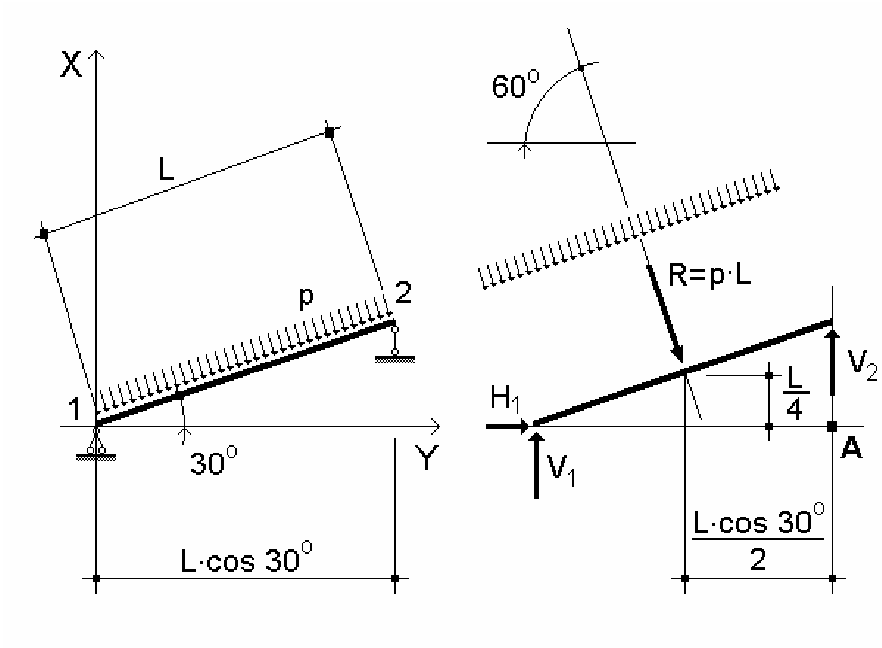



**Fig.2.7**

**Grindă înclinată rezemată vertical şi încărcată normal pe axa barei.**

**Inclined beam, vertically supported and loaded perpendicular to the axis of the beam.**

**a.** calculul rezultantelor încărcării:

**a.** calculation of the resultant forces of the load:

$$R = p \cdot L$$

$$R_x = R \cdot \cos 60^{o} = 0.50000\, p \cdot L$$

$$R_y = R \cdot \cos 30^{o} = 0.86603\, p \cdot L$$

**b.** calculul reacțiunilor:

**b.** calculation of the reactions:

$$\sum M_1 = 0: \quad -R \cdot L/2 + V_2 \cdot L \cdot \cos 30^{o} = 0$$
$$V_2 = 0.57735\, p \cdot L$$

$$\sum M_A = 0: \quad -V_1 \cdot L \cdot \cos 30^{o} - R_x \cdot L/4 + R_y \cdot L \cdot \cos 30^{o} = 0$$
$$V_1 = 0.28868\, p \cdot L$$

$$\sum F_x = 0: \quad H_1 + R_x = 0$$
$$H_1 = -0.50000\, p \cdot L$$

**c.** verificarea reacțiunilor:

**c.** verification of the reactions:

$$\sum F_y = 0.57735\, p \cdot L + 0.28868\, p \cdot L - R_y = 0 \qquad \textbf{(!)}$$

**d.** calculul eforturilor (se va ține seama de sensul real al reacțiunilor, fig2.8):

**d.** calculation of the internal forces (the actual direction of the reactions will be taken into account, fig.2.8):

$$N_{12} = -0.28868 \cdot p \cdot L \cdot \cos 60^{o} + 0.50000 \cdot p \cdot L \cdot \cos 30^{o} = 0.28867\, p \cdot L$$

$$N_{21} = 0.28868 \cdot p \cdot L \cdot \cos 60^{o} = 0.28867\, p \cdot L$$

$$Q_{12} = 0.28868 \cdot p \cdot L \cdot \cos 30^{o} + 0.50000 \cdot p \cdot L \cdot \cos 60^{o} = 0.50000\, p \cdot L$$

$$Q_{21} = -0.57735 \cdot p \cdot L \cdot \cos 30^{o} = -0.50000\, p \cdot L$$

$$M_{12} = 0$$

$$M_{21} = 0$$

**e.** momentul încovoietor maxim:

**e.** maximum bending moment:

$$M_{max} = M(L/2) = 0.57735 \cdot p \cdot L \cdot L \cdot \cos 30^{o} / 2 - p \cdot L/2 \cdot L/4 = p \cdot L^2 / 8$$

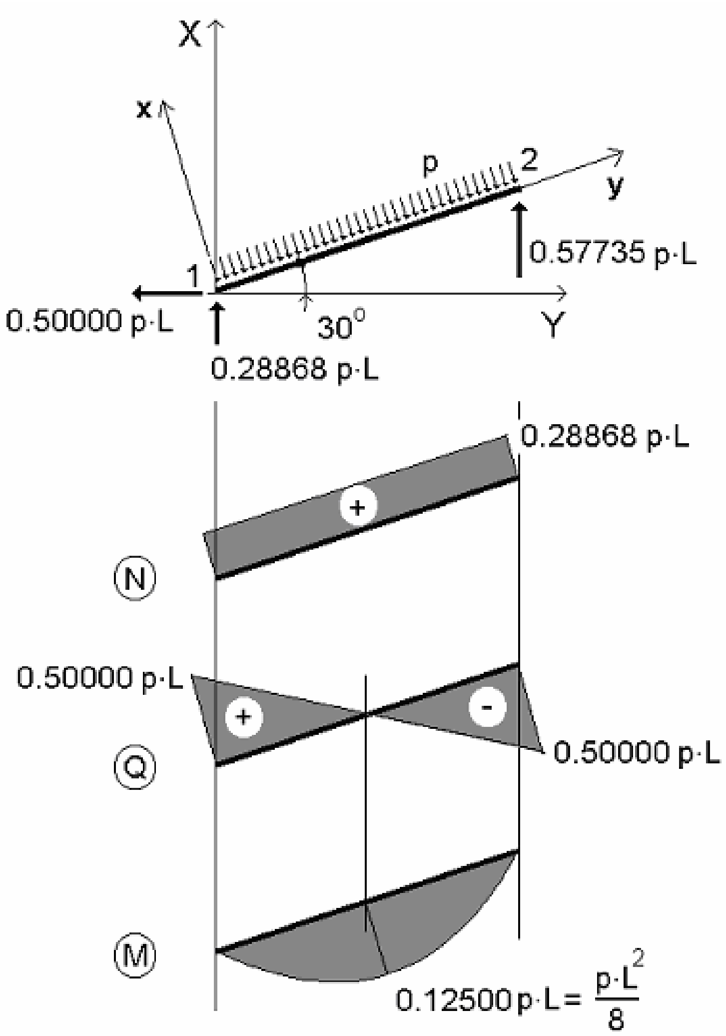



**Fig.2.8**

**Diagramele de eforturi ale structurii din fig.2.7.**

**Internal forces' diagrams of the structure in fig.2.7.**

Utilizând matricele de transformare, vom determina eforturile la extremitățile grinzii după cum urmează:

By using the transformation matrices, the internal forces at the ends of the beam are calculated as follows:

**f.** matricea de transformare pentru ω=30º:

**f.** transformation matrix for ω=30º:

$$[t]_{01} = \begin{bmatrix} 0.86603 & -0.50000 & 0 \\ 0.50000 & 0.86603 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şi:

and:

$$[t]_{02} = [t]_{01}$$

**g.** vectorii eforturilor în raport cu sistemul XOY:

**g.** vectors of the internal forces with respect to coordinate system XOY:

$$\{E\}_1 = \begin{Bmatrix} 0.50000\, p \cdot L \\ 0.28868\, p \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{E\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.57735\, p \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**h.** vectorii eforturilor la extremitățile grinzii:

**h.** vectors of the internal forces at the ends of the beam:

$$\{e\}_1 = [t]_{01} \cdot \{E\}_1 = \begin{Bmatrix} 0.28868\, p \cdot L \\ 0.50000\, p \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{e\}_2 = [t]_{02} \cdot \{E\}_2 = \begin{Bmatrix} 0.28868\, p \cdot L \\ -0.50000\, p \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**E 2.1** ✍

**Exemplu / Example 2.2**

Să se determine starea de eforturi pentru grinda înclinată din fig.2.9, având un reazem simplu normal pe axa barei şi solicitată de o încarcare uniform distribuită, perpendiculară pe axa acesteia.

Determine the internal forces in the inclined beam shown in fig.2.9, having a roller support normal to the axis of the beam and subjected to a uniformly distributed load perpendicular to its axis.

**a.** calculul rezultantei încărcărilor este acelaşi ca cel din exemplul 2.1 ;

**a.** calculation of the resultant forces of the load is the same as in the example 2.1 ;

**b.** calculul reacțiunilor:

**b.** calculation of the reactions:

$$\sum M_1 = 0 : \quad -R \cdot L/2 + R_2 \cdot L = 0$$
$$R_2 = 0.50000\, p \cdot L$$

$$\sum M_A = 0 : \quad -V_1 \cdot L / \cos 30^{o} - R \cdot L/2 = 0$$
$$V_1 = 0.43301\, p \cdot L$$

$$\sum F_X = 0 : \quad H_1 + R \cdot \cos 60^{o} - R_2 \cdot \cos 60^{o} = 0$$
$$H_1 = -0.25000\, p \cdot L$$

**c.** verificarea reacțiunilor:

**c.** verification of the reactions:

$$\sum F_y = 0.43301\, p \cdot L + 0.50000\, p \cdot L \cdot \cos 30^{o} - R_y = 0 \qquad \textbf{(!)}$$

**d.** momentul încovoietor maxim:

**d.** maximum bending moment:

$$M_{max} = M(L/2) = 0.50000 \cdot p \cdot L \cdot L/2 - p \cdot L/2 \cdot L/4 = p \cdot L^2/8$$

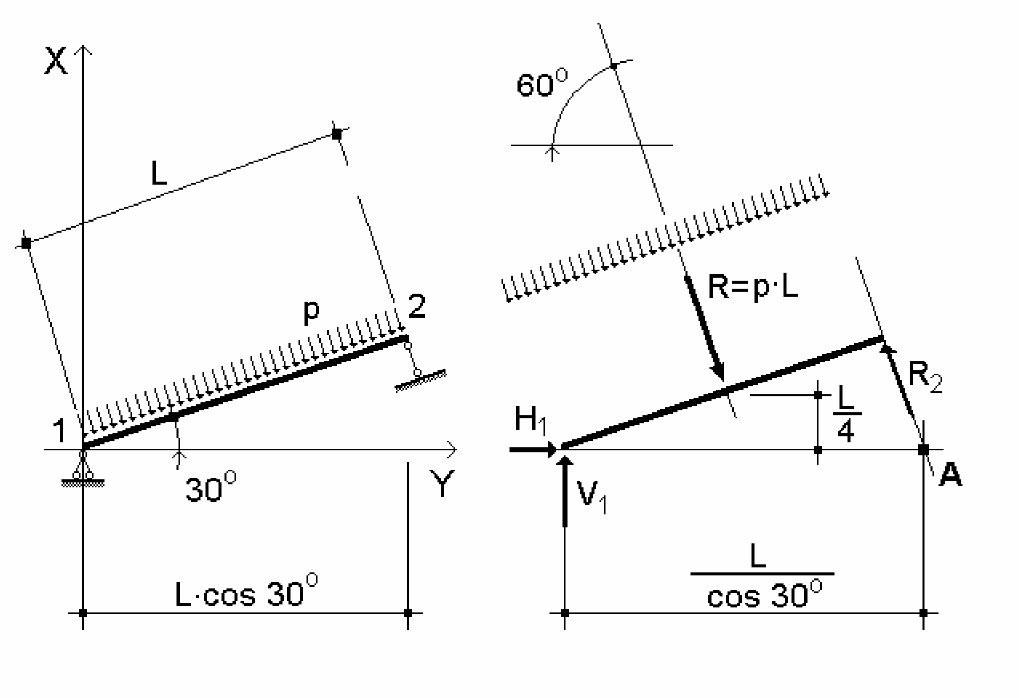



**Fig.2.9**

**Grindă înclinată având un reazem simplu normal pe axa barei.**

**Inclined beam with a roller support perpendicular to the axis of the beam.**

Utilizând matricele de transformare, vom determina eforturile la extremitățile grinzii după cum urmează:

By using the transformation matrices, the internal forces at the ends of the beam will be calculated as follows:

**e.** vectorii eforturilor în raport cu sistemul XOY:

**e.** vectors of the internal forces with respect to the coordinate system XOY:

$$\{E\}_1 = \begin{Bmatrix} 0.25000\,p \cdot L \\ 0.43301\,p \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{E\}_2 = \begin{Bmatrix} -0.25000\,p \cdot L \\ -0.43301\,p \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**f.** matricele de transformare sunt aceleași ca la exemplul 2.1;

**f.** transformation matrices are the same as in the example 2.1;

**g.** vectorii eforturilor la extremitățile grinzii:

**g.** vectors of the internal forces at the ends of the beam:

$$\{e\}_1 = [t]_{01} \cdot \{E\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.50000\,p \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{e\}_2 = [t]_{02} \cdot \{E\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.50000\,p \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix}$$

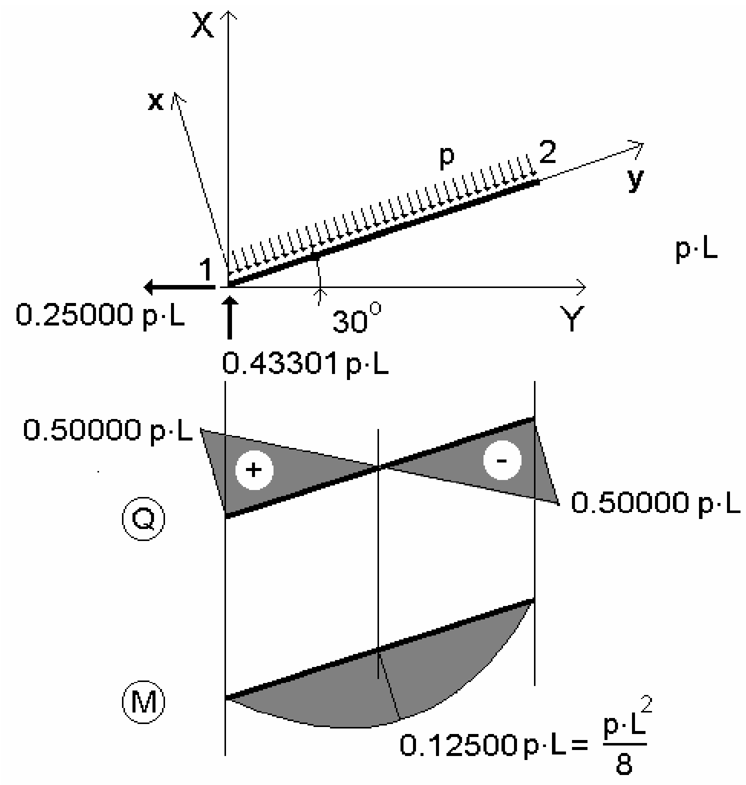



**Fig.2.10**

**Diagramele de eforturi ale structurii din fig.2.9.**

**Internal forces' diagrams of the structure in fig.2.9.**

**Observație:** comparând diagramele de eforturi obținute în cele două cazuri (exemplele 2.1 şi 2.2), rezultă că eforturile N din exemplu 2.2 sunt nule şi că eforturile Q şi M sunt identice.

**Note:** by comparing the internal forces' diagrams obtained in the last two cases (examples 2.1 and 2.2), it is noticed that the axial force N in the example 2.2. is zero and the internal forces Q and M are identical.

**E 2.2** ✍

**Exemplu / Example 2.3**

Să se determine starea de eforturi pentru grinda înclinată din fig.2.11, rezemată vertical şi solicitată de o sarcină uniform distribuită vertical.

Determine the internal forces for the inclined beam shown in fig.2.11, vertically supported and subjected to a vertical uniformly distributed load.

**a.** calculul reacțiunilor:

**a.** calculation of the reactions:

Intrucât reazemul 2 este vertical şi încărcarea este de asemenea verticală, reacţiunile orizontale vor fi nule şi cele două reacţiuni verticale vor fi egale.

Because the support 2 is vertical and the load is also vertical, the horizontal reactions are zero and the two vertical reactions are equal.

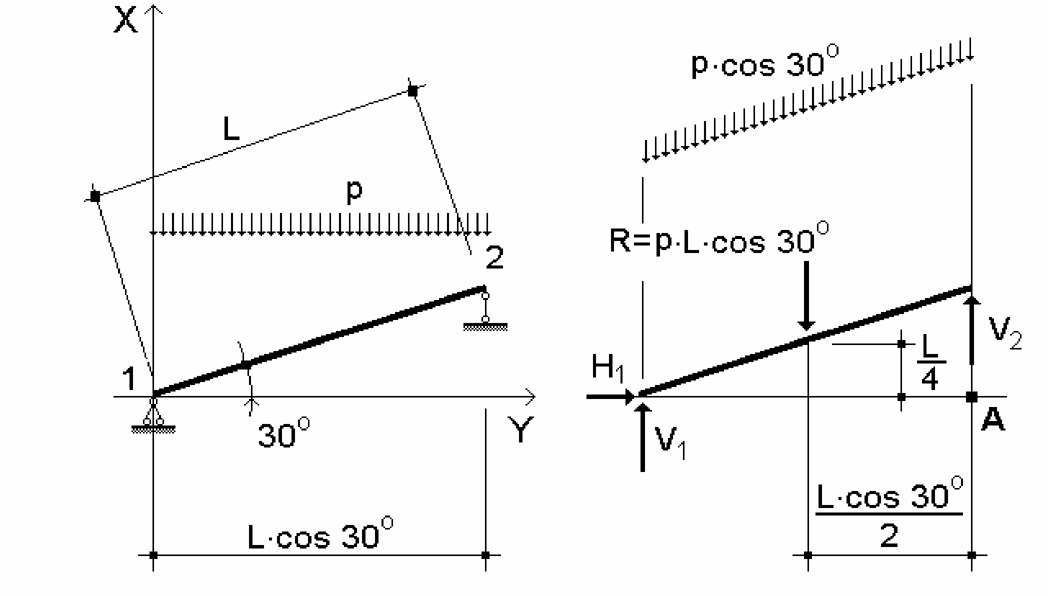



**Fig.2.11**

**Grindă înclinată rezemată vertical şi solicitată de o încărcare uniform distribuită vertical.**

**Inclined beam, vertically supported and subjected to a vertical uniformly distributed load.**

$$H_1 = 0 \qquad V_1 = V_2 = p \cdot L/2 \cdot \cos 30^{O} = 0.43301\, p \cdot L$$

**b.** vectorii eforturilor in raport cu sistemul XOY:

**b.** vectors of the internal forces with respect to coordinate system XOY:

$$\{E\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.43301\, p \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{E\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.43301\, p \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**c.** matricele de transformare sunt aceleaşi ca în exemplele 2.1 şi 2.2;

**c.** transformation matrices are the same as in the examples 2.1 and 2.2;

**d.** vectorii eforturilor la extremităţile grinzii:

**d.** vectors of the internal forces at the ends of the beam:

$$\{e\}_1 = [t]_{01} \cdot \{E\}_1 = \begin{Bmatrix} -0.21650\, p \cdot L \\ 0.37499\, p \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{e\}_2 = [t]_{02} \cdot \{E\}_2 = \begin{Bmatrix} 021650\, p \cdot L \\ -0.37499\, p \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**e.** momentul încovoietor maxim:

**e.** maximum bending moment:

$$M_{max} = M(L/2) = 0.43301 \cdot p \cdot L \cdot L \cdot \cos 30^{o}/2 - p \cdot L \cdot \cos 30^{o}/2 \cdot L \cdot \cos 30^{o}/4 = 0.09375 p \cdot L^2$$

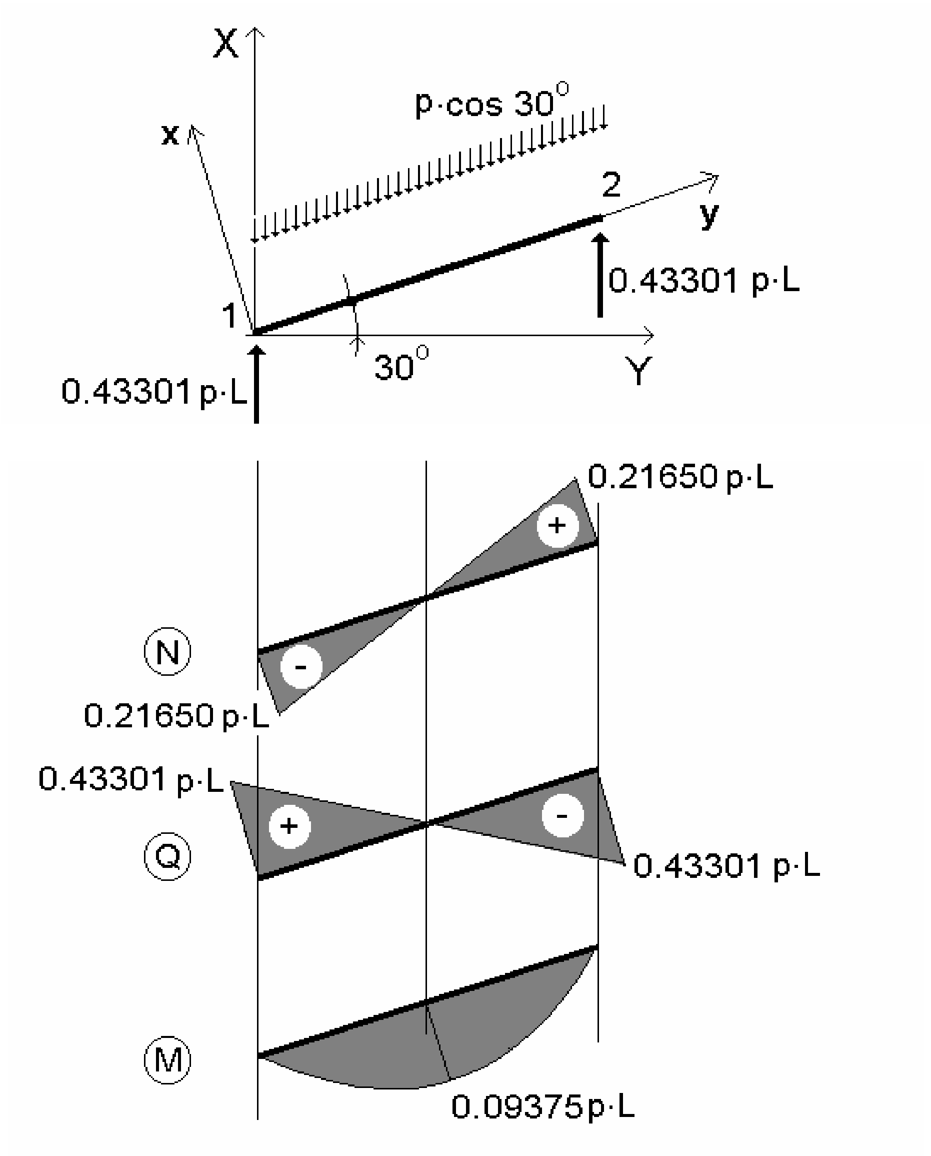



**Fig.2.12**

**Diagramele de eforturi ale structurii din fig.2.11.**

**Internal forces' diagrams of the structure in fig.2.11.**

**Observație:** Intrucât încărcarea este verticală şi grinda este înclinată, rezultă două componente ale încărcării: una pe direcția paralelă cu axa grinzii şi alta perpendiculară pe aceasta - componenta ce urmăreşte axa barei produce efort normal în grindă.

**Note:** Because the load is vertical and the beam is inclined, there are two components of the loading; one parallel to the axis of the beam and the other one perpendicular to the axis of the beam - the component following the axis of the beam will produce the axial force in the beam.

| **E 2.3** ✍ |
|---|
| **Exemplu / Example 2.4** |

Să se determine starea de eforturi pentru grinda înclinată din fig.2.13, rezemată normal pe axa barei şi solicitată de o încărcare uniform repartizată vertical.

Determine the internal forces in the inclined beam in fig.2.13, supported perpendicular to the axis of the beam and subjected to a vertical uniformly distributed load.

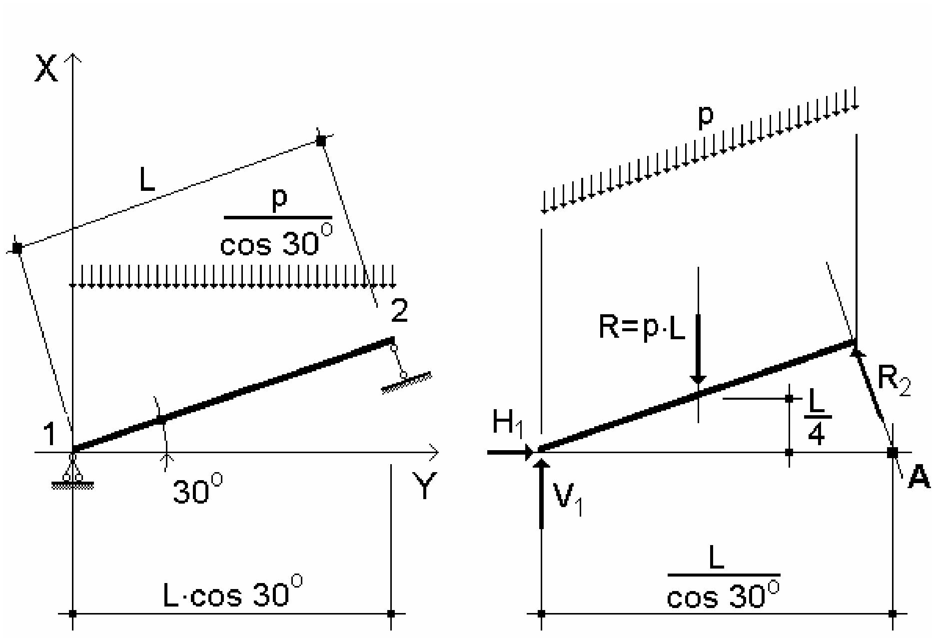



**Fig.2.13**

**Grindă înclinată rezemată normal pe axă şi solicitată de o sarcină verticală.**

**Inclined beam, supported perpendicular to the axis and subjected to a vertical load.**

**a.** calculul reacțiunilor:

**a.** calculation of the reactions:

$\sum M_1 = 0$ :

$$R_2 \cdot L - p \cdot L \cdot L/2 \cdot \cos 30^o = 0$$
$$R_2 = 0.43301\ p \cdot L$$

$\sum M_A = 0$ :

$$V_1 \cdot L/\cos 30^o - p \cdot L \cdot (L/\cos 30^o - L/2 \cdot \cos 30^o) = 0$$
$$V_1 = 0.62500\ p \cdot L$$

$\sum F_x = 0$ :

$$H_1 - R_2 \cdot \cos 60^o = 0$$
$$H_1 = -0.21650\, p \cdot L$$

**b.** verificarea reacțiunilor:

**b.** verification of the reactions:

$$\sum F_y = 0.62500\, p \cdot L - p \cdot L + 0.43301\, p \cdot L \cdot \cos 30^o = 0 \qquad \textbf{(!)}$$

**c.** vectorii eforturilor în raport cu sistemul XOY :

**c.** vectors of the internal forces with respect to the coordinate system XOY:

$$\{E\}_1 = \begin{Bmatrix} -0.21651\, p \cdot L \\ 0.62500\, p \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{E\}_2 = \begin{Bmatrix} -0.21651\, p \cdot L \\ -0.37500\, p \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**d.** matricele de transformare sunt aceleaşi ca în exemplele 2.1 şi 2.2;

**d.** transformation matrices are the same as in the examples 2.1 and 2.2;

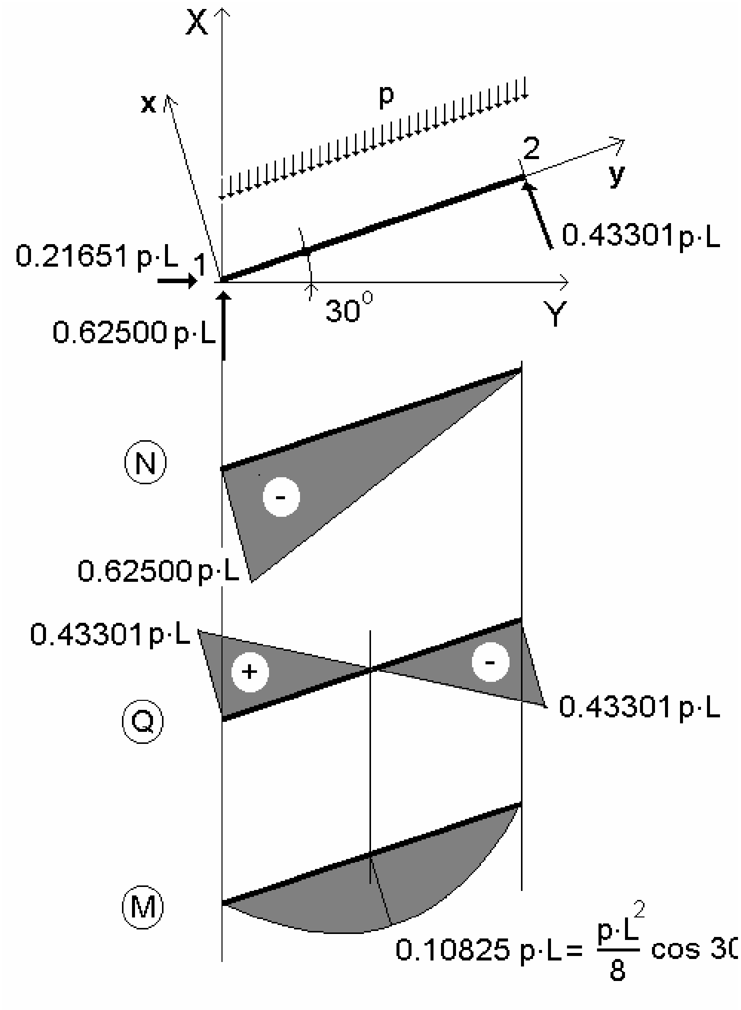



**Fig.2.14**

**Eforturile din grinda din fig.2.13.** **Internal forces in the beam in fig.2.13.**

**e.** vectorii eforturilor la extremitățile grinzii:

**e.** vectors of the internal forces at the ends of the beam:

$$\{e\}_1 = [t]_{01} \cdot \{E\}_1 = \begin{Bmatrix} -0.50000\,p \cdot L \\ 0.43301\,p \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{e\}_2 = [t]_{02} \cdot \{E\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.43301\,p \cdot L \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**f.** momentul încovoietor maxim:

**f.** maximum bending moment:

$$M_{max} = M(L/2) = 0.43301 p \cdot L \cdot L/2 - p \cdot L/2 \cdot L/4 \cos 30^{O} = 0.10825 p \cdot L^2 = p \cdot L^2/8 \cdot \cos 30^{O}$$

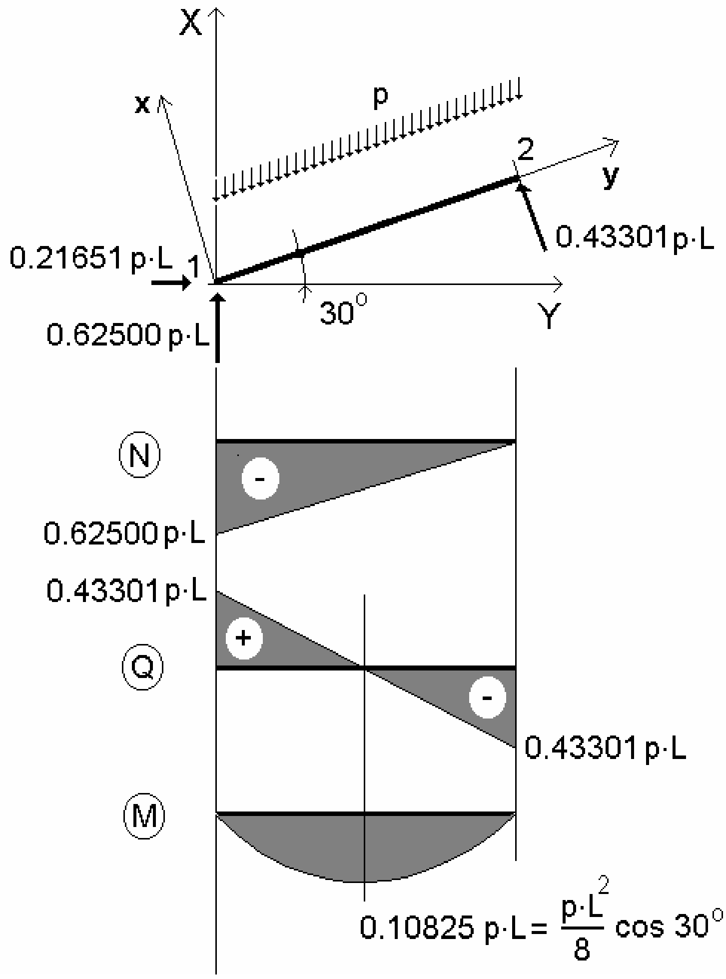



**Fig.2.15**

**Eforturile din grindă reprezentate în raport cu axa OY.**

**Internal forces in the beam with respect to the OY axis.**

**Observație:** există, de asemenea, posibilitatea de a reprezenta diagramele de eforturi în raport cu o altă axă decât cea a barei, fig.2.15.

**Note:** it is lso possible to draw the internal forces' diagrams with respect to an axis different from the axis of the beam, fig.2.15.

**E 2.4** ✍

In figurile următoare sunt prezentate diagramele de eforturi pentru alte grinzi înclinate cu diferite situații de încărcate.

The internal forces for other inclined beams subjected to different loads are shown in the following figures.

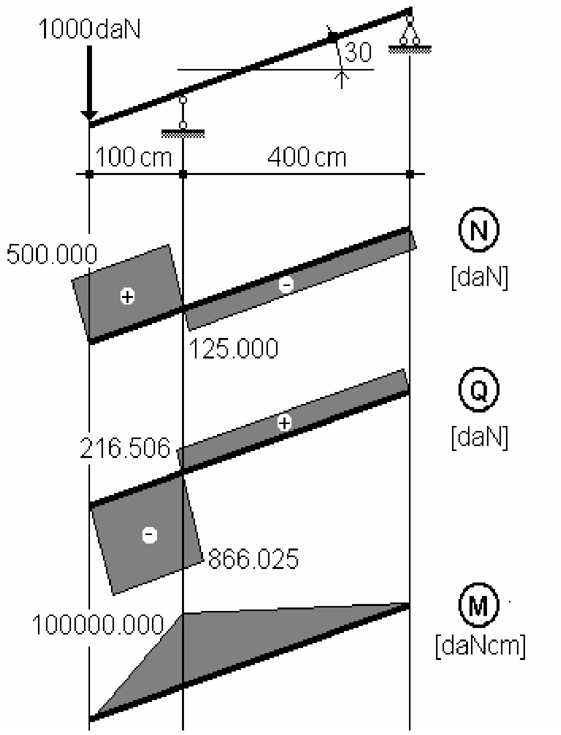



**Fig.2.16.**

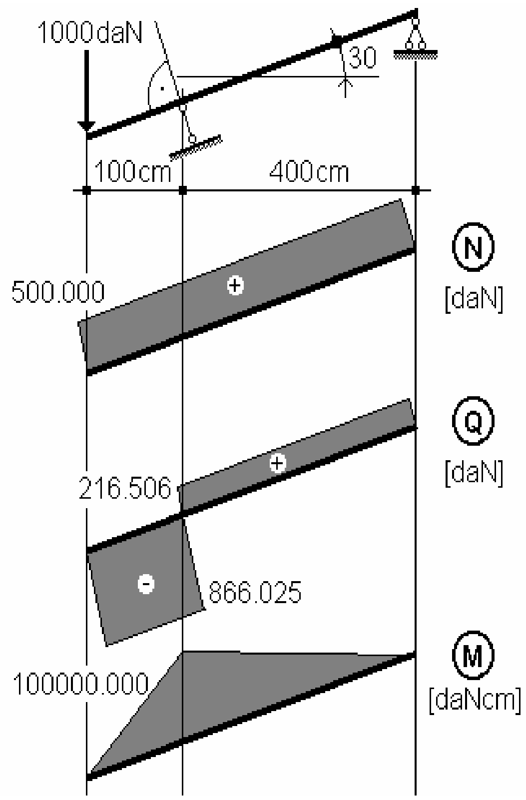



**Fig.2.17.**

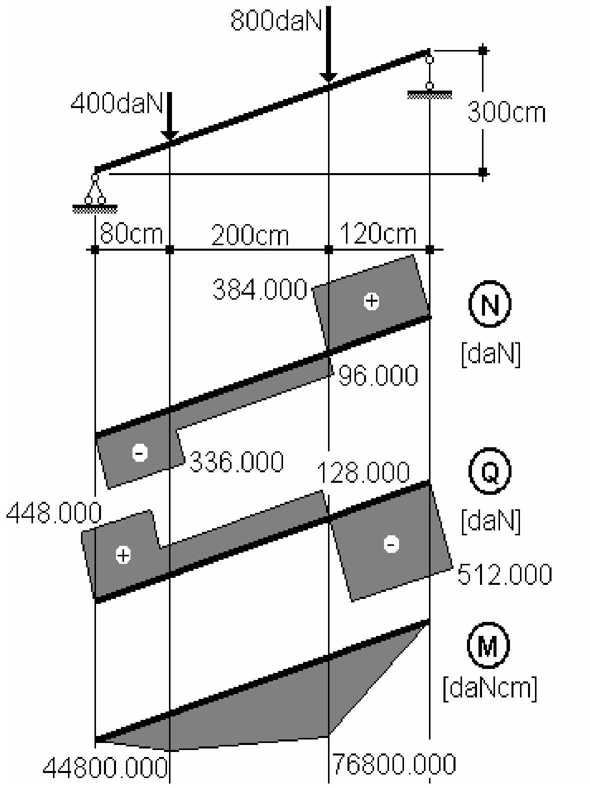



**Fig.2.18.**

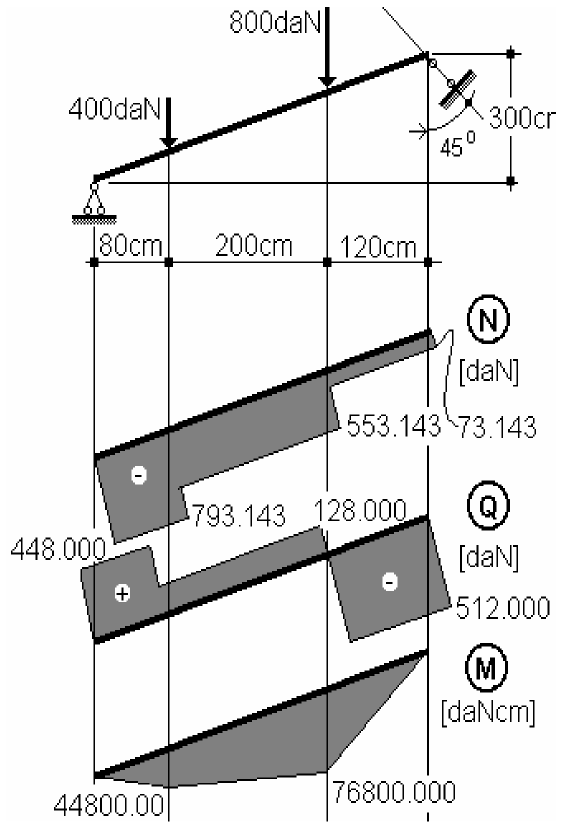



**Fig.2.19.**

## 2.2 GRINZI GERBER

Aceste grinzi se mai numesc şi **grinzi cu console şi articulaţii**. Acestea sunt de fapt grinzi continue, având un număr de articulaţii interioare în aşa fel că devin structuri static determinate, fig.2.20.

## 2.2 GERBER BEAMS

These beams are also called **beams with overhangs and hinges (internal pins)**. These are in fact continuous beams, having a number of hinges located such that the beams become statically determinate structures, fig.2.20.

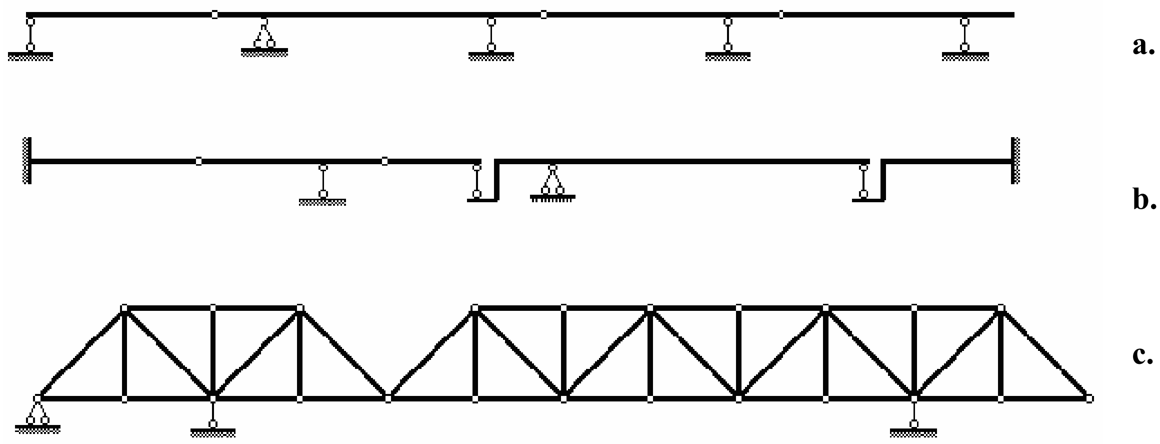



**Fig.2.20**

**Grinzi Gerber. a. - grindă simplu rezemată, b. - grindă încastrată, c. - grindă cu zăbrele**

**Gerber beams. a. - simply supported beam, b. - encastré beam, c. - truss**

Vom considera grinda Gerber din fig.2.20.a şi o vom descompune în elementele componente, fig.2.21.

- grinda **1-2** poate fi considerată simplu rezemată, fiind legată de ansamblul **2-7**, care este fixat numai pe reazeme simple, fig.2.21.b şi c;
- grinda **2-5** este simplu rezemată în **3** şi **4** şi are o legătură pe direcţia orizontală dată de grinda **1-2**, fig.2.21.d, ceea ce ne permite să o considerăm simplu rezemată, fig.2.21.e. ; dacă încărcarea este numai verticală, atunci efortul normal este nul, deci din punct de vedere static vom putea considera varianta prezentată în fig.2.21.f;

Consider the Gerber beam shown in fig. 2.20.a. This is broken down into the main components, fig.2.21.

- beam **1-2** can be considered as simply supported, being connected to the system **2-7** which is fixed to the ground only by simple supports, fig.2.21.b and c;
- beam **2-5** is simply supported at **3** and **4** and has a connection in the horizontal direction given by the beam **1-2**, fig.2.21.d which allows us to consider it as simply supported, fig.2.21.e.; if there is only vertical load, then the axial force is zero, consequently, from the statical point of view, the structural scheme shown in fig. 2.21.f can be considered;

- grinda **5-7** este articulată în **5** de un sistem fix în plan şi simplu rezemată în **6**, fig.2.21.g ; din punct de vedere static, aceasta se poate considera ca o grindă simpu rezemată, fig.2.21.h.

- beam **5-7** is pinned connected at **5** to a system fixed in plan and simply supported at **6,** fig.2.21.g ; from the statical point of view, this beam can be considered as simply supported, fig.2.21.h.

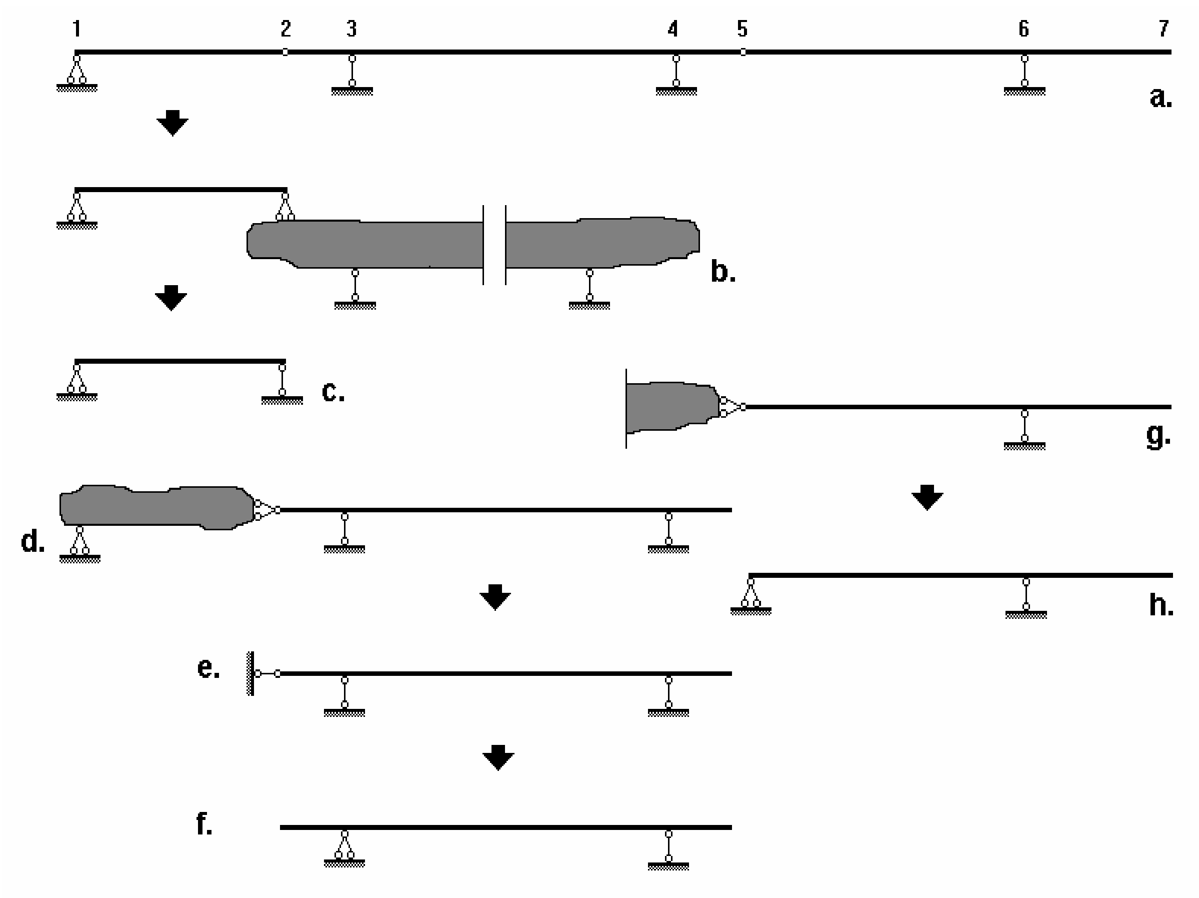



**Fig.2.21**

**Elementele componente ale unei grinzi Gerber.**

**Components of a Gerber beam.**

**Observație:**

Grinzile care transmit efectul încărcărilor direct la teren se numesc **sisteme principale** iar grinzile care transmit efectul încărcărilor cu ajutorul altor grinzi se numesc **sisteme secundare**.

**Note:**

The beams which transfer the effect of the loads directly to the ground are called **main systems** and the beams which transfer the effect of the loads through other beams are called **secondary systems.**

Prin descompunerea grinzii din fig.2.21, vom obține două sisteme secundare **1-2**, **5-7** şi un sistem principal **2-5**. In fig.2.22 este prezentată schema evolutivă de calcul.

By braking down the beam in fig.2.21, two secondary systems **1-2, 5-7** and one main system **2-5** are obtained. Fig. 2.22 shows the structural scheme of the beam.

Intrucât cele două sisteme secundare se reazemă pe un sistem principal, va trebui să determinăm reacțiunile sistemelor secundare produse de încărcările care acționează pe ele. Aceste reacțiuni sunt în continuare aplicate ca încărcări pe sistemul principal împreună cu cele care sunt aplicate direct pe acest sistem, fig.2.22.c.

Since the two secondary systems are supported by the main system, the reactions of the secondary systems produced by the loads acting on them have to be calculated first. These reactions are afterwards applied as loads to the main system in conjunction with those directly applied to this system, fig.2.22.c.

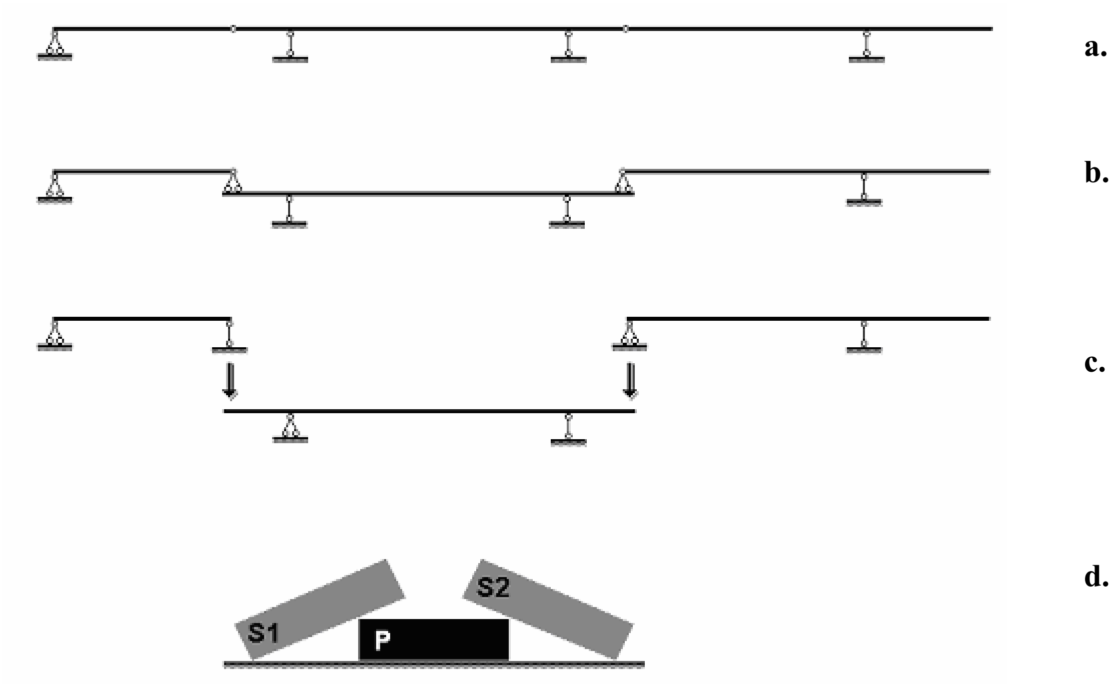



**Fig.2.22**

**Schema de calcul evolutivă a unei grinzi Gerber.**

**Structural scheme of a Gerber beam.**

O încărcare pe grinda **1-2**, care este un sistem secundar, produce deformarea acestei grinzi, fig.2.23.a. Ea transmite eforturi sistemului principal, grinda **2-5**, care are de asemenea o deformație. In această situație grinda **5-7** nu are deformații, ea are numai deplasări fără eforturi în structură, fig.2.23.a.

One load applied to the beam **1-2**, which is a secondary system, will produce the deformation of this system, fig.2.23.a. This beam will transfer forces to the main system **2-5,** which will also deflect. In this case, the beam **5-7** does not have any deformations, it has only displacements without internal forces, fig.2.23.a.

In cazul unei încărcări a sistemului principal, grinda **2-5**, celelalte sisteme secundare, **1-2** şi **5-7**, sunt numai deplasate fără a avea eforturi în structurile lor, fig.2.23.b.

In the case of a load applied to the main system, beam **2-5**, the other secondary systems, **1-2** and **5-7**, have only displacements without internal forces, fig.2.23.b.

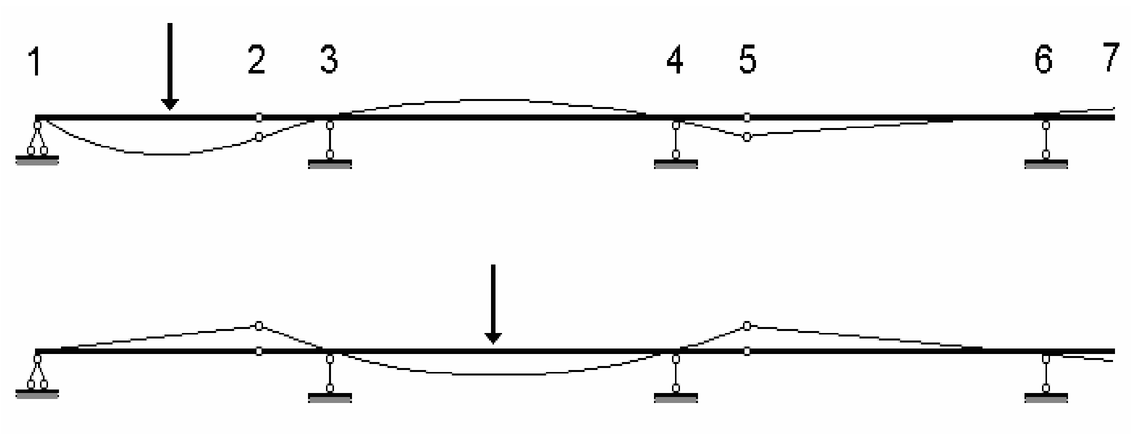



**Fig.2.23**

**Efectul unei încărcări pe o grindă Gerber.**
a. - încărcarea pe sistemul secundar,
b. - încărcarea pe sistemul principal

**Effect of loding on a Gerber beam.**
a. - load on the secondary system,
b. - load on the main system

Elementele componente ale grinzilor Gerber simple din fig.2.20 sunt reprezentate în fig.2.24 ... 2.26.

The main components of the simple Gerber beams in fig.2.20 are presented in fig.2.24 ... 2.26.

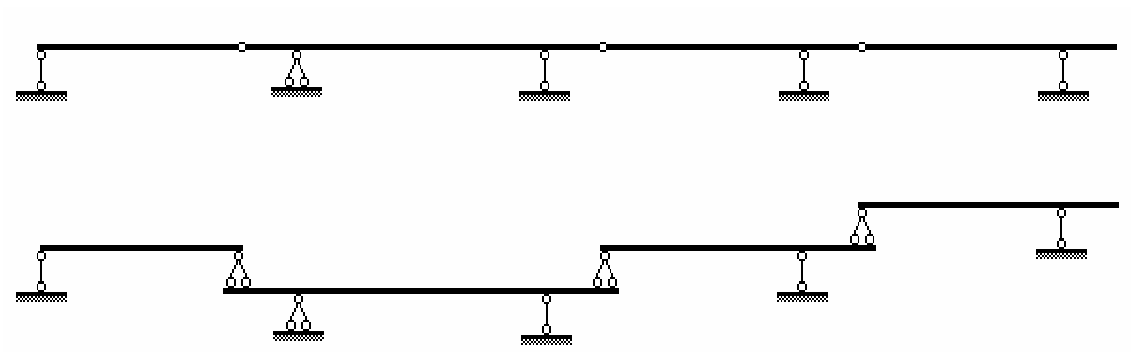


**Fig.2.24**

**Elementele componente ale grinzii Gerber din fig.2.20.a.**

**Components of the Gerber beam in fig.2.20.a.**

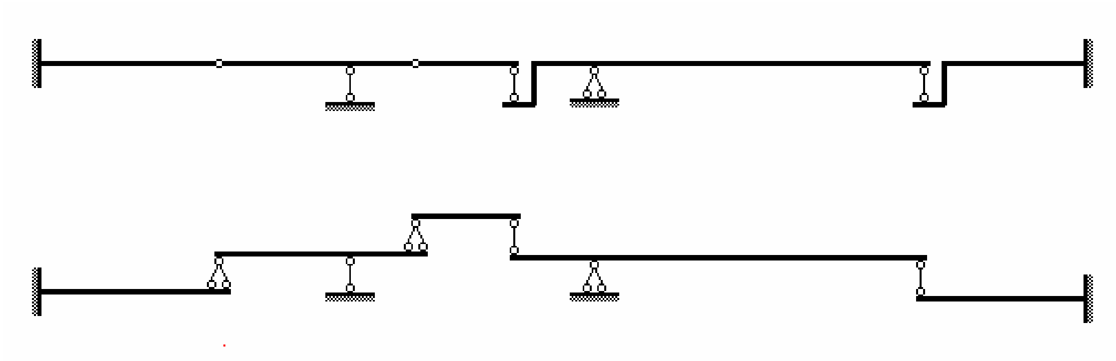


**Fig.2.25**

**Elementele componente ale grinzii Gerber din fig.2.20.b.**

**Components of the Gerber beam in fig.2.20.b**

**Pentru realizarea unei grinzi Gerber, plecând de la o grindă continuă static nedeterminată, fig.2.27.a, vom efectua etapele următoare:**

- determinarea gradului de nedeterminare statică, care este egal cu numărul legăturilor suplimentare în raport cu grinda simplu rezemată, fig.2.27.a;
- eliminarea legăturilor suplimentare, prin introducerea unui număr de articulații egal cu gradul de nedeterminare statică, obținând un sistem geometric invariabil - eliminarea incorectă a legăturilor conduce la apariția de sisteme static nedeterminate sau de mecanisme, fig.2.27.b;
- verificarea că structura întreagă şi fiecare sistem simplu este static determinat;
- numărul sistemelor principale trebuie să fie cât mai mare posibil, fig.2.27.c - dacă există un singur sistem principal, în cazul unui accident a acestuia, întregul ansamblu va fi distrus, fig.2.27.d;

**In order to obtain a Gerber beam from a statically indeterminate continuous beam, fig.2.27.a, the next steps have to be followed:**

- calculation of the degree of statical indeterminacy, which is equal to the number of additional connections with respect to the simply supported beam, fig.2.27.a;
- release of the additional connections by introducing a number of hinges equal to the degree of statical indeterminacy, thus obtaining a geometrically invariable system - the incorrect release of connections leads to statically indeterminate systems or mechanisms, fig.2.27.b;
- check if the whole structure and each simple system is statically determinate;
- the number of main systems has to be as large as possible, fig.2.27.c - if there is only one main system, in the case when it is damaged, the whole system will fail, fig.2.27.d;

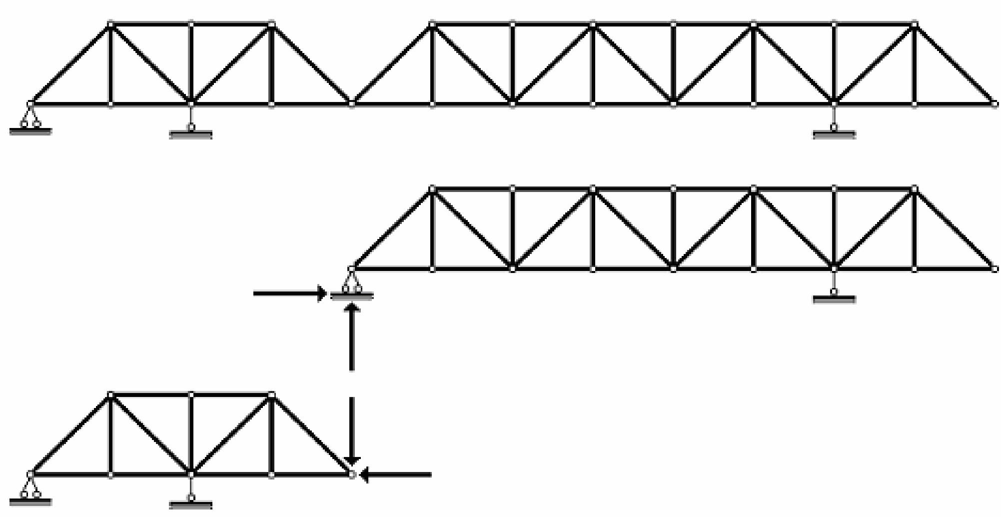


**Fig.2.26**

**Elementele componente ale unei grinzi Gerber cu zăbrele.**

**Components of a Gerber truss.**

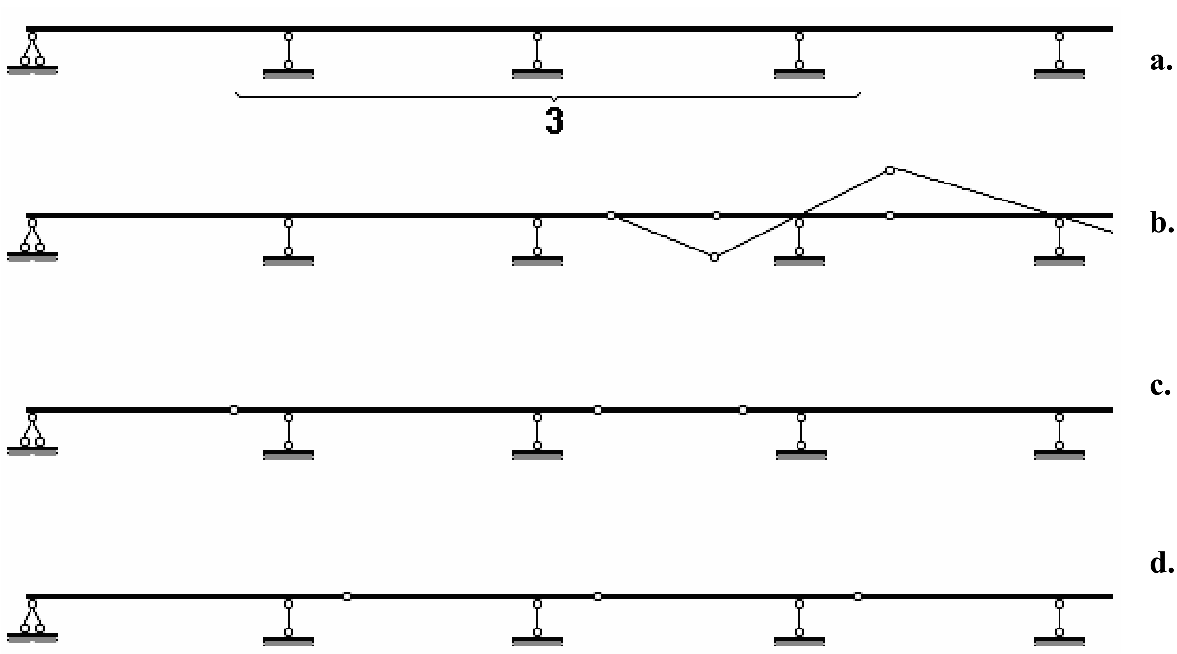



**Fig.2.27**

**Realizarea unei grinzi Gerber.**

**Formation of a Gerber beam.**

**Etapele de calcul pentru grinzile Gerber sunt următoarele:**

**i.** stabilirea elementelor componente - sisteme principale, secundare şi schema evolutivă de calcul;

**The steps in the analysis of Gerber beams are the following:**

**i.** identify the main components - the main and secondary systems and the structural scheme ;

**ii.** calculul reacțiunilor grinzilor pe care nu se reazemă alte grinzi şi apoi aplicarea acestora ca încărcări pe sistemele pe care reazemă;

**iii.** calculul evolutiv al reacțiunilor sistemelor încărcate cu încărcările proprii şi cele produse de sistemele care reazemă pe ele;

**iv.** calculul eforturilor;

**v.** reprezentarea diagramelor de eforturi pentru fiecare sistem, pe o singură axă de referință.

**ii.** calculation of the reactions of the beams which do not support other beams; theses reactions are then applied as loads to the systems which support them;

**iii.** calculation of the reactions of the systems subjected to their own loads and those produced by the systems they support;

**iv.** calculation of the internal forces;

**v.** drawing of the internal forces' diagrams for each system, with respect to a single reference axis.

**Exemplu / Example 2.5**

Să se determine starea de eforturi pentru grinda Gerber din fig.2.28, ale cărei componente au fost analizate în fig.2.21.

Determine the internal forces for the Gerber beam shown in fig.2.28, whose components were analysed in fig.2.21.

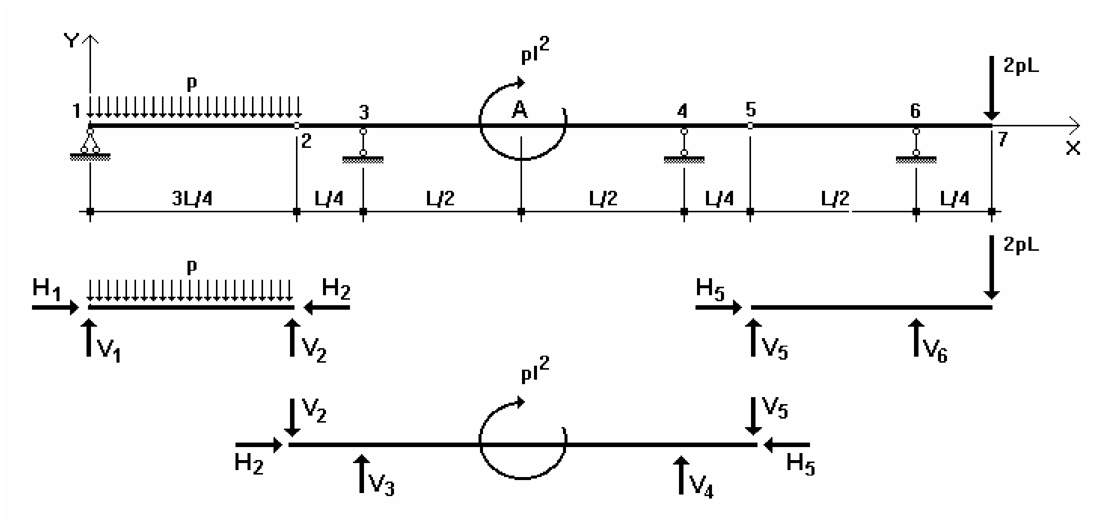



**Fig.2.28**

**Grindă Gerber şi componentele sale.** **Gerber beam and its components.**

**a.** calculul reacțiunilor orizontale pentru grinzile **5-7, 2-5, 1-2**:

**a.** calculation of the horizontal reactions for the beams **5-7, 2-5, 1-2**:

$$\sum F_x = 0: \qquad H_5 = 0 \qquad H_2 = 0 \qquad H_1 = 0$$

**b.** calculul reacțiunilor pentru grinda **1-2**:

**b.** calculation of the reactions for beam **1-2**:

$$\sum M_1 = 0 : \quad V_2 \cdot 3 \cdot L/4 - p \cdot 3 \cdot L/4 \cdot 3 \cdot L/8 = 0 \quad V_2 = 0.37500\, p \cdot L$$

$$\sum M_2 = 0 : \quad -V_1 \cdot 3 \cdot L/4 + p \cdot 3 \cdot L/4 \cdot 3 \cdot L/8 = 0 \quad V_1 = 0.37500\, p \cdot L$$

**c.** verificarea reacțiunilor pentru grinda **1-2**:

**c.** verification of the reactions for beam **1-2**:

$$\sum F_y = p \cdot 3 \cdot L/4 - 0.37500\, p \cdot L - 0.37500\, p \cdot L = 0 \qquad \textbf{(!)}$$

**d.** calculul reacțiunilor pentru grinda **5-7**:

**d.** calculation of the reactions for beam **5-7**:

$$\sum M_5 = 0 : \quad V_6 \cdot 2 \cdot L / 4 - 2 \cdot p \cdot L \cdot 3 \cdot L / 4 = 0 \quad V_6 = 3.00000\, p \cdot L$$

$$\sum M_6 = 0 : \quad -V_5 \cdot 2 \cdot L/4 - 2 \cdot p \cdot L \cdot L/4 = 0 \quad V_5 = -1.00000\, p \cdot L$$

**e.** verificarea reacțiunilor pentru grinda **5-7**:

**e.** verification of the reactions for beam **5-7**:

$$\sum F_y = -2.p \cdot L - 1.00000\, p \cdot L + 3.00000\, p \cdot L = 0 \qquad \textbf{(!)}$$

**f.** calculul reacțiunilor pentru grinda **2-5**:

**f.** calculation of the reactions for beam **2-5**:

$$\sum M_3 = 0 : \quad 0.37500 p \cdot L \cdot L/4 - p \cdot L^2 + V_4 \cdot L - 1.00000 p \cdot L \cdot 5 \cdot L/4 = 0$$

$$V_4 = -0.34375\, p \cdot L$$

$$\sum M_4 = 0 : \quad 0.37500\, p \cdot L \cdot 5 \cdot L/4 - V_3 \cdot L - p \cdot L^2 - 1.00000\, p \cdot L \cdot L/4 = 0$$

$$V_3 = -0.28125\, p \cdot L$$

**g.** verificarea reacțiunilor pentru grinda **2-5:**

**g.** verification of the reactions for beam **2-5**:

$$\sum F_y = -0.37500 p \cdot L - 0.28125 p \cdot L - 0.34375 p \cdot L + 1.00000 p \cdot L = 0 \qquad \textbf{(!)}$$

**h.** calculul eforturilor în grinda **1-2**:

**h.** calculation of the internal forces in beam **1-2:**

$$Q_{12} = 0.37500\, p \cdot L$$

$$Q_{21} = 0.37500\, p \cdot L - p \cdot 3 \cdot L/4 = -0.37500\, p \cdot L$$

$$M_{12} = 0$$

$$M_{21} = 0$$

$$M_{max} = 0.37500\, p \cdot L \cdot 3 \cdot L/8 - p \cdot 3 \cdot L/8 \cdot 3 \cdot L/16 = 0.07031\, p \cdot L^2$$

**i.** calculul eforturilor în grinda **5-7:**

**i.** calculation of the internal forces in beam **5-7:**

$$Q_{56} = -1.00000\, p \cdot L$$

$$Q_{65} = -1.00000\, p \cdot L$$

$$Q_{67} = -1.00000\, p \cdot L + 3.00000\, p \cdot L = 2.00000\, p \cdot L$$

$$Q_{76} = 2.00000\, p \cdot L$$

$$M_{56} = 0$$

$$M_{65} = -1.00000\, p \cdot L \cdot 2 \cdot L/4 = -0.50000\, p \cdot L^2$$

$$M_{67} = -0.50000\, p \cdot L^2$$

$$M_{76} = 0$$

**j.** calculul eforturilor în grinda **2-5:**

**j.** calculation of the internal forces in beam **2-5:**

$$Q_{23} = -0.37500\, p \cdot L$$

$$Q_{32} = -0.37500\, p \cdot L$$

$$Q_{34} = -0.37500\, p \cdot L - 0.28125\, p \cdot L = -0.65625\, p \cdot L$$

$$Q_{43} = -0.65625\, p \cdot L$$

$$Q_{45} = -0.65625\, p \cdot L - 0.34375\, p \cdot L = -1.00000\, p \cdot L$$

$$Q_{54} = -1.00000\, p \cdot L$$

$$M_{23} = 0$$

$$M_{32} = -0.37500\, p \cdot L \cdot L/4 = -0.09375\, p \cdot L^2$$

$$M_{A32} = -0.37500\, p \cdot L \cdot (L/4 + L/2) - 0.28125\, p \cdot L \cdot L/2 = -0.42188\, p \cdot L^2$$

$$M_{A43} = -0.42188\, p \cdot L^2 + p \cdot L^2 = -0.57813\, p \cdot L^2$$

$$M_{54} = 0$$

$$M_{45} = 1.00000\, p \cdot L \cdot l/4 = 0.25000\, p \cdot L^2$$

Diagramele de eforturi sunt prezentate în fig.2.29.

The internal forces' diagrams are presented in fig.2.29.

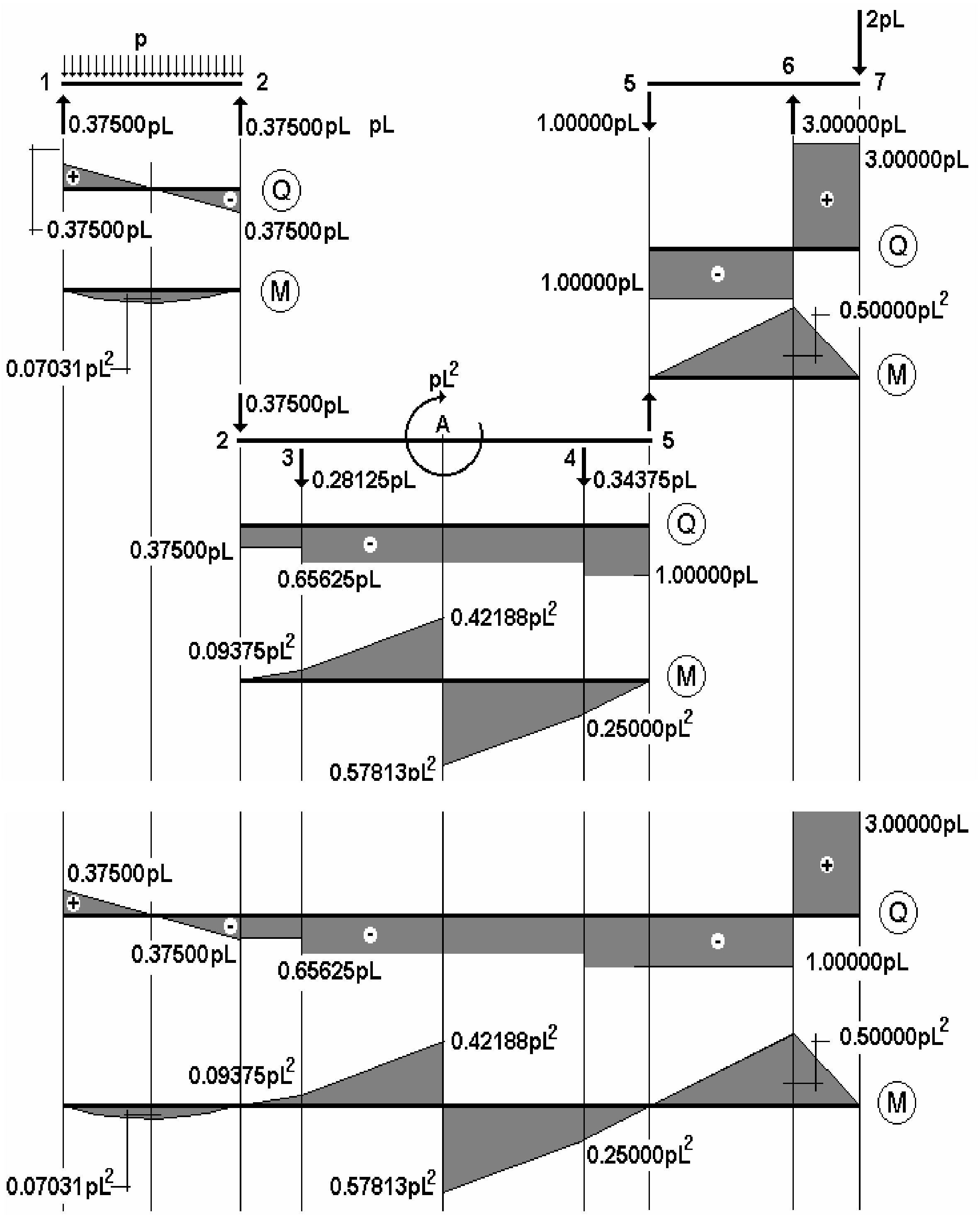



**Fig.2.29**

**Eforturile din grinda Gerber din fig.2.28.**

**Internal forces in the Gerber beam shown in fig.2.28.**

**E 2.5** ✍

Pentru grinzile Gerber există, de asemenea, posibilitatea de a calcula reacțiunile fără descompunerea în sisteme secundare şi principale. In consecință, putem utiliza schema prezentată în fig.2.30 pentru a calcula reacțiunile pentru structura din fig.2.28.

The calculation of the reactions for Gerber beams can also be carried out without braking them down in main and secondary systems. Consequently, in order to calculate the reactions of the structure shown in fig.2.28, the structural scheme shown in fig.2.30 can be used.

Această modalitate de calcul este posibilă întrucât fiecare tronson legat de o structură prin articulații trebuie să fie în echilibru. De asemenea, nu este posibilă rotirea în raport cu articulația pentru fiecare tronson individual.

This procedure can be used due to the fact that each system connected to a structure by hinges must be in equilibrium. At the same time, each individual system will have no rotation with respect to the hinge.

Calculul reacțiunii $V_6$, fig.2.30.a:

Calculation of the reaction $V_6$, fig.2.30.a:

$$\sum M_5 = 0 : \quad V_6 \cdot 2 \cdot L/4 - 2 \cdot p \cdot L \cdot 3 \cdot L/4 = 0$$
$$V_6 = 3.00000\, p \cdot L$$

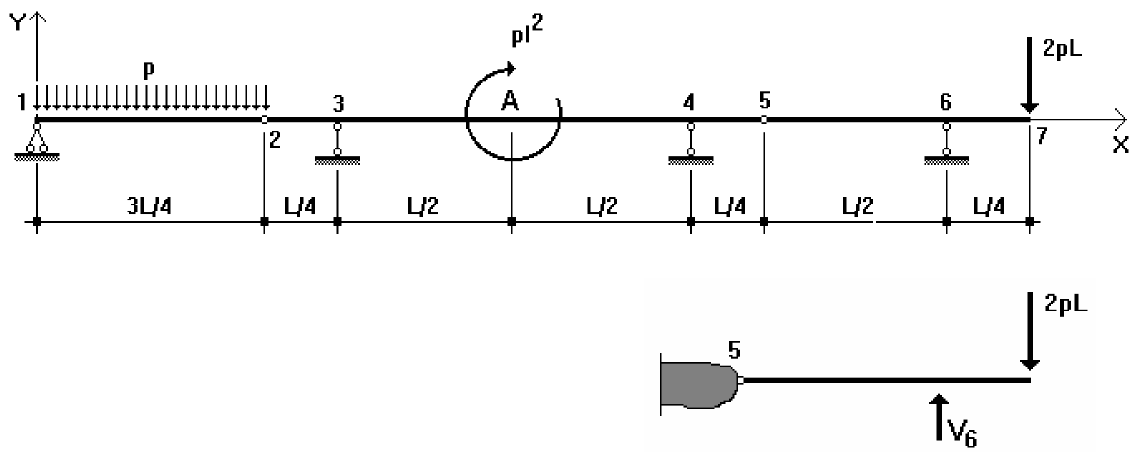



**Fig.2.30.a**

**Calculul reacțiunilor pentru grinda Gerber din fig.2.28.**

**Calculation of the reactions for the Gerber beam in fig.2.28.**

Calculul reacțiunilor $V_3$ şi $V_4$, fig.2.30.b şi c:

Calculation of the reactions $V_3$ and $V_4$, fig.2.30.b and c:

$$\sum M_2 = 0 : \quad -2 \cdot p \cdot L \cdot 9 \cdot L/4 + 3.00000 \cdot p \cdot L \cdot 8 \cdot L/4 + V_4 \cdot 5 \cdot L/4 + v_3 \cdot L/4 = 0$$

$$\sum M_1 = 0 : \quad -2\cdot p\cdot L\cdot 12\cdot L/4 + 3.00000\cdot p\cdot L\cdot 11\cdot L/4 + V_4\cdot 8\cdot L/4 + V_3\cdot 4\cdot L/4 = 0$$

$$V_3 = -0.28125\, p\cdot L$$

$$V_4 = -0.34375\, p\cdot L$$

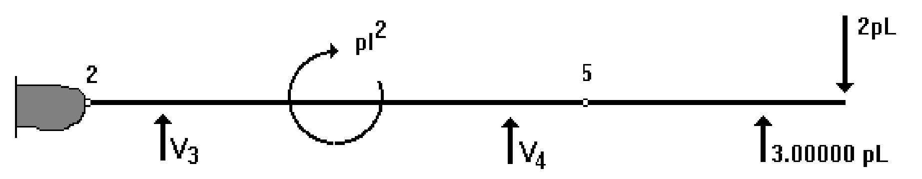



**Fig.2.30.b**

**Calculul reacțiunilor pentru grinda Gerber din fig.2.28.**

**Calculation of the reactions for the Gerber beam in fig.2.28.**

Calculul reacțiunilor $V_1$ și $H_1$:

Calculation of the reactions $V_1$ and $H_1$:

$$\sum F_y = 0 : \quad V_1 - p\cdot L - 0.28125\, p\cdot L - 0.34375\, p\cdot L + 3.00000\, p\cdot L - 2\cdot p\cdot L = 0$$

$$V_1 = 0.37500\, p\cdot L$$

$$\sum F_x = 0 : \quad H_1 = 0$$

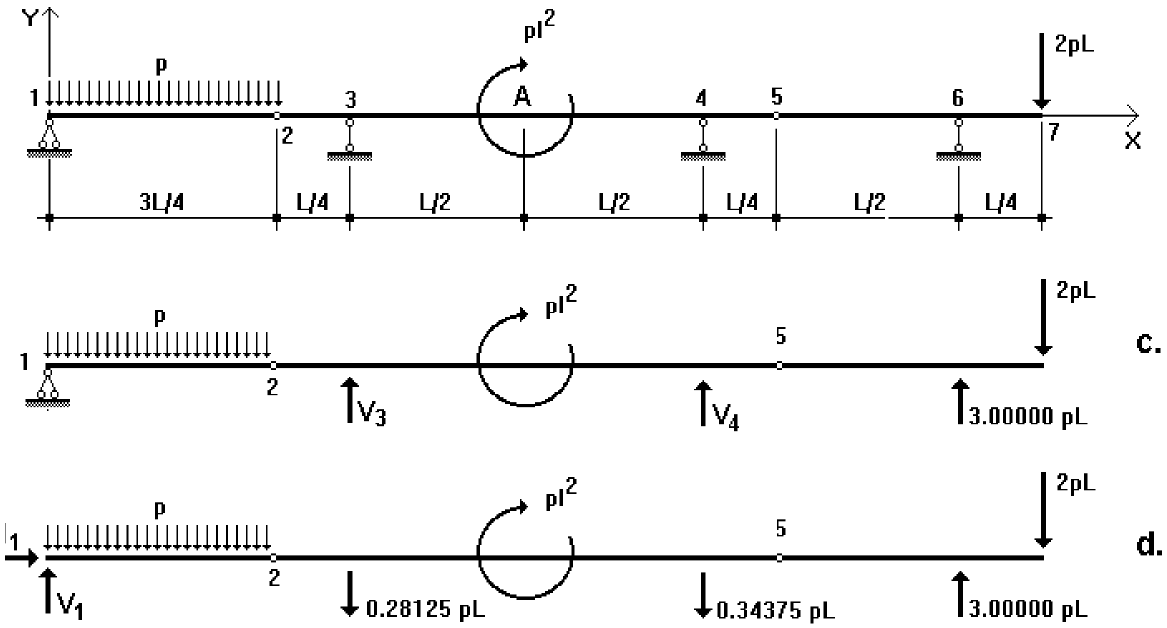



**Fig.2.30.c**

**Calculul reacțiunilor pentru grinda Gerber din fig.2.28.**

**Calculation of the reactions for Gerber beam in fig.2.28.**

## 2.3 CADRE STATIC DETERMINATE

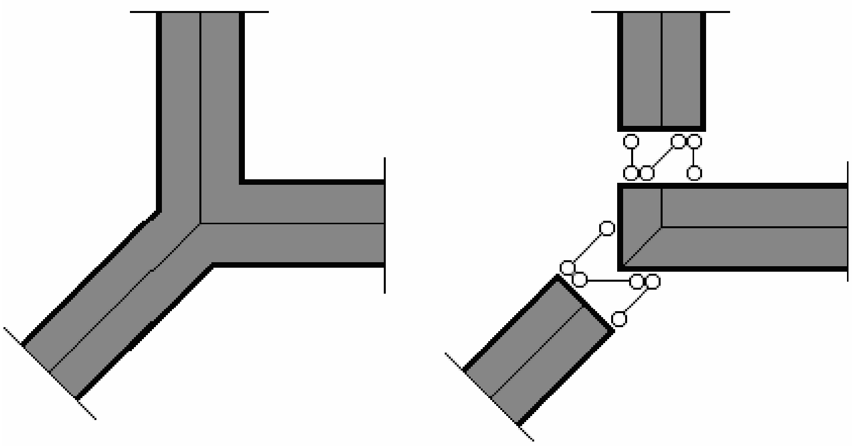
Cadrele sunt structuri de rezistență compuse din combinații de **bare**, grinzi şi stâlpi, legate în **noduri**. Numărul de legături într-un nod este în funcție de tipul de cuplaj şi de numărul barelor.

Cuplajul rigid al barelor este reprezentat în fig.2.31, cel articulat în fig.2.32 şi cel parțial articulat în fig.2.33.

## 2.3 STATICALLY DETERMINATE FRAMES

Frames are structures composed of a combination of **bars**, beams and columns, connected at joints. The number of connections at a joint depends on the type of connection and the number of bars.

A rigid connection of bars is shown in fig.2.31, a pinned connection is shown in fig.2.32 and a semirigid connection is shown in fig.2.33.



**a.** **b.**

**Fig.2.31**

**Cuplajul rigid al barelor.**
a. - nodul, b. - legăturile necesare

**Rigid connection of bars.**
a. - joint, b. - required connections

Intr-un nod rigid, barele sunt încastrate unele în altele şi unghiul dintre bare rămâne acelaşi după deformația structurii.

Intr-un nod articulat, există posibilitatea unei rotiri relative între bare.

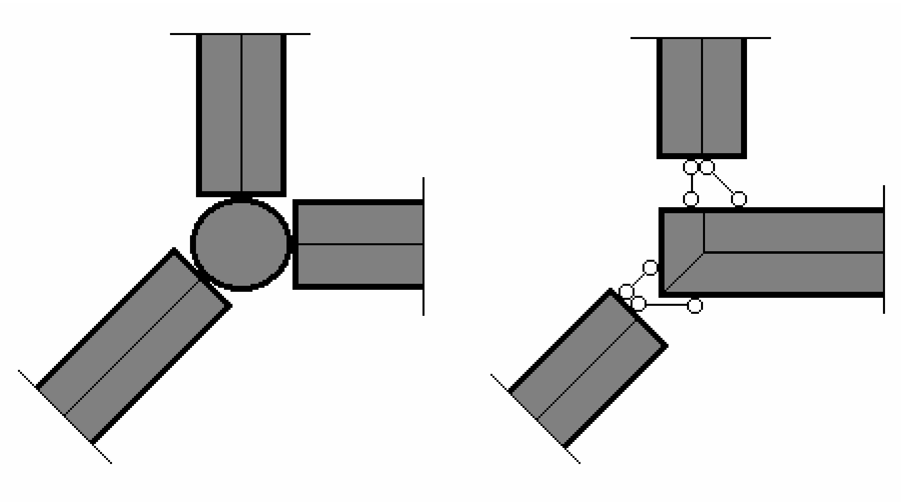
**Numărul de legături dintr-un nod unde concură n bare este egal cu:**

At a rigid joint, the bars are fully fixed connected to each other and the angle between bars remains the same after the deformation of the structure.

At a pinned joint, there is a relative rotation between bars.

**The number of connections at a joint with n bars is equal to :**

- **nod rigid / rigid joint**: $(n-1)\cdot 3$
- **nod articulat / pinned joint**: $(n-1)\cdot 2$

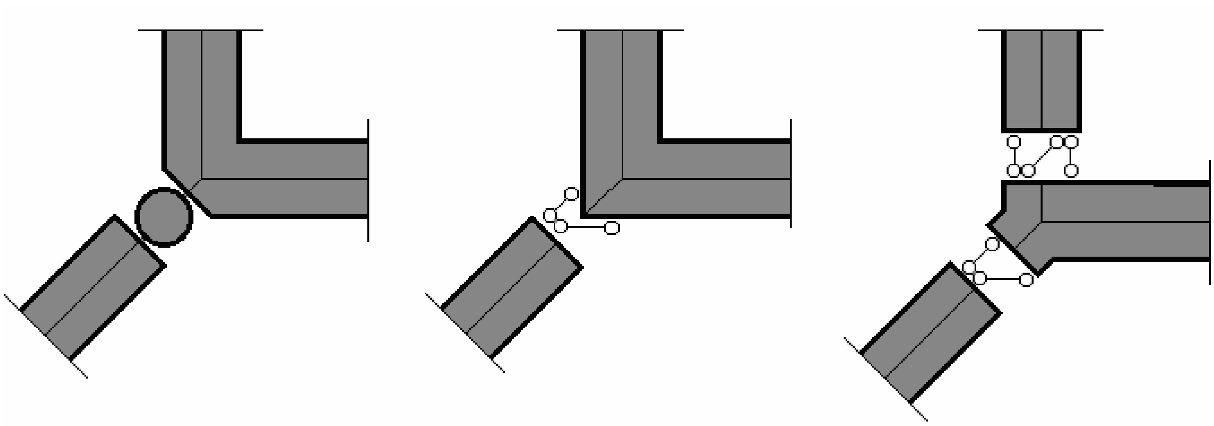


a. b.

**Fig.2.32**

**Cuplaj articulat al barelor.**
a. - nodul, b. - legăturile necesare

**Pinned connection of bars.**
a. - joint, b. - required connections



a. c. d.

**Fig.2.33**

**Cuplaj din bare parțial articulat.**
a. - nodul, b şi c - legăturile necesare

**Semirigid connection of bars.**
a. - joint, b. and c. - required connections

Cadrele sunt în marea lor majoritate static nedeterminate dar cunoaşterea cadrelor static determinate este foarte importantă pentru studiul cadrelor static nedeterminate.

In the vast majority of cases, the frames are statically indeterminate structures but the analysis of the statically determinate frames is very important in order to understand the behaviour of the statically indeterminate frames.

Pentru a simplifica modul de rezolvare a unui cadru plan, se consideră un sistem de axe **XOY**, cu ajutorul căruia se notează barele structurii urmărind sensul pozitiv al axei OX, prin deplasare în lungul axei OY (de exemplu de la stânga la dreapta şi de jos în sus).

In oder to simplify the analysis of plane frames, a coordinate system **XOY** is considered. The bars of the frame are denoted following the positive direction of the axes OX and OY, (i.e. from left to right and from bottom to top).

Fiecare bară are un sistem propriu de axe **xoy**, fig.2.34, cu originea în **i** şi respectând condiția **i<j.**

Each bar has its own coordinate system **xoy**, fig.2.34, with the origin at **i** and satisfying the condition **i<j**.

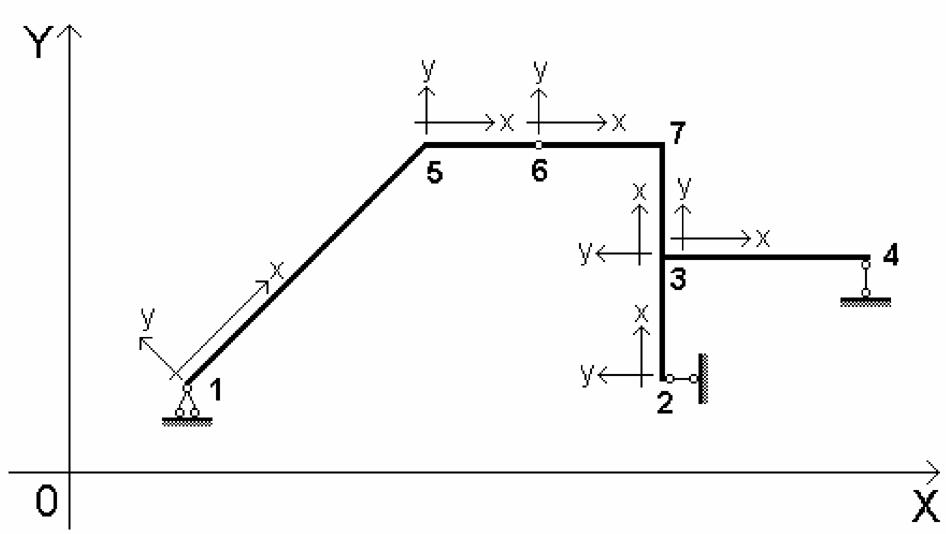



**Fig.2.34**

**Notarea barelor unui cadru şi sistemele de axe.**

**Notation of bars of a frame and coordinate systems.**

Pentru calculul cadrelor static determinate este necesară urmărirea etapelor generale de calcul ale structurilor static determinate (cap.1.6), cu câteva particularități specifice acestor tipuri de structuri.

For the analysis of the statically determinate frames, the general steps for the analysis of the statically determinate structures have to be followed (chap.1.6), with some particular issues, specific to this type of structures.

**Principii de calcul pentru cadrele static determinate:**

**Principles in the analysis of statically determinate frames :**

- într-un nod unde sunt două bare, valoarea momentului încovoietor calculată pentru o bară rămâne aceeaşi pentru cea de a doua bară (ordonata este rabătută de la o bară la alta);

- at a joint with two bars, the bending moment in a bar will be equal to the bending moment in the adjacent bar (the ordinate is continuous around the joint) ;

- într-un nod **i**, cu trei sau mai multe bare, trebuie calculată valoarea momentului încovoietor pentru fiecare capăt de bară şi verificat echilibrul nodului:

- at a joint **i** with three or more bars, the bending moment needs to be calculated for each end of bar and the joint equilibrium has to be checked:

$$\sum \mathbf{M}_{ij} = \mathbf{0}$$

- diagramele de eforturi sunt reprezentate pe schema structurii pentru fiecare bară, în raport cu sistemul propriu de axe, respectând regulile prezentate în cap.1.6 (diagramele de moment încovoietor sunt întotdeauna dispuse pe partea întinsă a barei şi diagramele de forță axială şi forță tăietoare au întotdeauna semn);

- the internal forces' diagrams are drawn for each bar with respect to its own coordinate system, satisfying the rules presented in chap.1.6 (the bending moment diagram is always drawn on the tensile side of the bar and the axial force and shear force diagrams have always a sign);

- verificarea echilibrului nodurilor (dacă în noduri sunt forțe exterioare concentrate, trebuie ținut de asemenea cont de acestea);

- verification of the joints' equilibrium (if there are external forces at the joints, they have to be taken into account);

- verificarea reacțiunilor şi a eforturilor utilizând lucrul mecanic virtual.

- verification of the reactions and internal forces using the virtual work.

**Exemplu / Example 2.6**

Să se determine starea de eforturi pentru structura din fig.2.35. Pentru această structură nu este necesar să se determine forțele de legătură (ele rezultă din diagramele de eforturi).

Determine the internal forces in the structure shown in fig.2.35. For this structure the reactions at the supports don't have to be calculated (they are obtained from the internal forces' diagrams).

**a.** calculul eforturilor:

**a.** calculation of the internal forces:

$$N_{32} = -P \cdot \cos 30^{o} = -0.86603\,P = N_{23}$$

$$N_{21} = -P = N_{12}$$

$$Q_{32} = P \cdot \cos 60^{o} = 0.50000\,P = Q_{23}$$

$$Q_{21} = 0 = Q_{12}$$

$$M_{32} = 0$$

$$M_{23} = -P \cdot L \cdot \cos 60^{o} = -0.50000\,P \cdot L = M_{21} = M_{12}$$

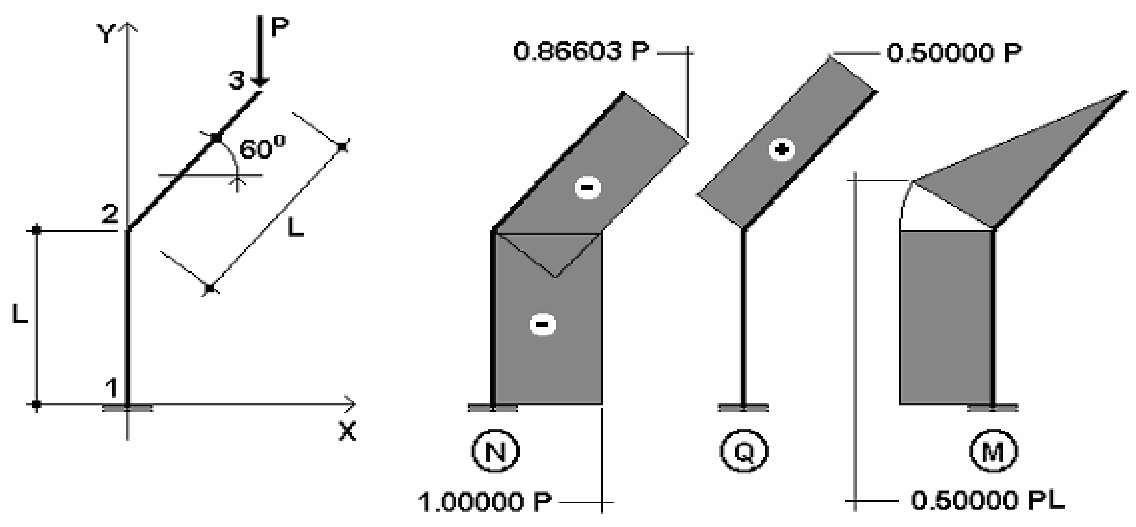



**Fig.2.35**

**Starea de eforturi într-o structură simplă.**

**Internal forces in a simple structure.**

Utilizând matricea de transformare, se determină eforturile la extremitățile barelor după cum urmează:

By using the transformation matrix, the internal forces at the end of the bars can be calculated as follows:

**b.** matricea de transformare pentru bara 1-2:

**b.** transformation matrix for the bar 1-2:

$$\omega = 90° \quad \Rightarrow \quad [t]_{012} = [t]_{021} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**c.** matricea de transformare pentru bara 2-3 :

**c.** transformation matrix for the bar 2-3 :

$$\omega = 60° \;\Rightarrow\; [t]_{023} = [t]_{032} = \begin{bmatrix} 0.50000 & -0.86603 & 0 \\ 0.86603 & 0.50000 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**d.** vectorii eforturilor în raport cu sistemul de axe XOY :

**d.** vectors of the internal forces with respect to the coordinate system XOY:

$$\{E\}_{12} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ -P \cdot L \cdot \cos 60^{o} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ -0.50000\,P \cdot L \end{Bmatrix} = \{E\}_{21}$$

$$\{E\}_{23} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ -0.50000\,P \cdot L \end{Bmatrix}$$

$$\{E\}_{32} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**e.** vectorii eforturilor la extremitățile barelor:

**e.** vectors of the internal forces at the end of the bars :

$$\{e\}_{12} = [t]_{012} \cdot \{E\}_{12} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ -0.50000\,P \cdot L \end{Bmatrix} = \{e\}_{21}$$

$$\{e\}_{23} = [t]_{023} \cdot \{E\}_{23} = \begin{Bmatrix} -0.86603\,P \\ 0.50000\,P \\ -0.50000\,P \cdot L \end{Bmatrix}$$

$$\{e\}_{32} = [t]_{032} \cdot \{E\}_{32} = \begin{Bmatrix} -0.86603\,P \\ 0.50000\,P \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**E 2.6** ✍

**Exemplu / Example 2.7**

Să se determine starea de eforturi pentru structura din fig.2.36.

Determine the internal forces for the structure shown in fig.2.36.

**a.** calculul reacțiunilor:

**a.** calculation of the reactions:

$$\sum M_1 = 0: \qquad V_2 \cdot L + P \cdot L - P/L \cdot L \cdot L/2 - P \cdot L = 0 \Rightarrow V_2 = P/2$$

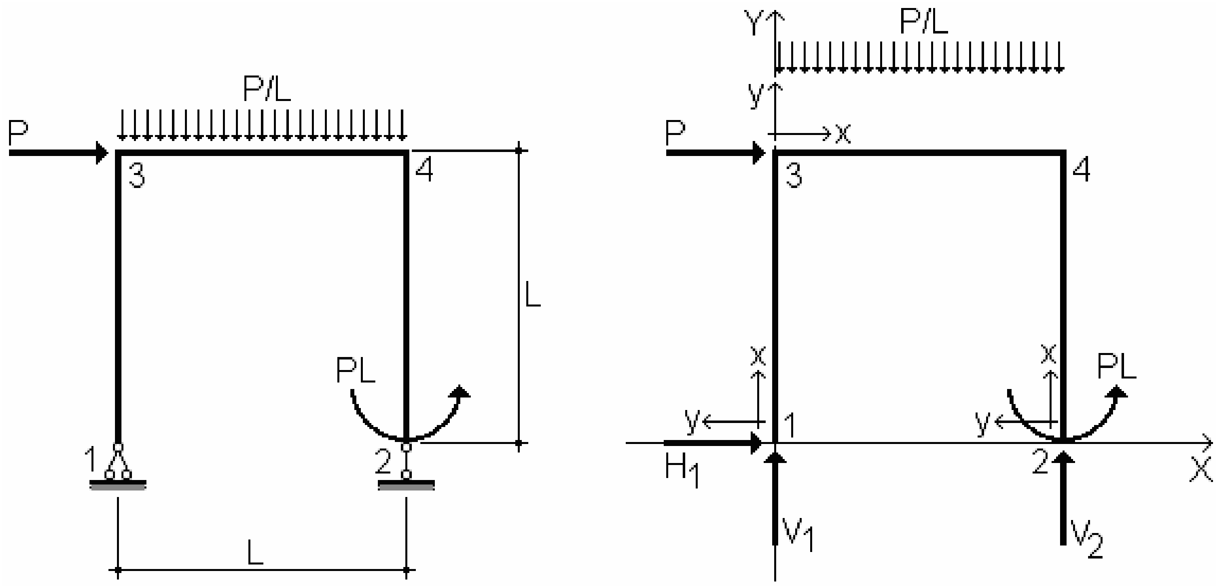
$$\sum M_2 = 0: \qquad V_2 \cdot L + P \cdot L - P/L \cdot L \cdot L/2 - P \cdot L = 0 \Rightarrow V_2 = P/2$$

$$\sum F_x = 0: \qquad P - H_1 = 0 \Rightarrow$$

**b.** verificarea reacțiunilor:

**b.** verification of the reactions:

$$\sum F_y = P/2 + P/2 - P/L \cdot L = 0$$ **(!)**




**a.** **b.**

**Fig.2.36**

**Cadru simplu rezemat.**
a. - structura, b. - structura şi forţele de legătură

**Simply supported frame.**
a. - structure, b. - structure and reactions at the supports

**c.** calculul eforturilor

$N_{13} = \text{-}P/2$

$N_{31} = \text{-}P/2$

$N_{34} = 0$

$N_{43} = 0$

$N_{24} = \text{-}P/2$

$N_{42} = \text{-}P/2$

$Q_{13} = P$

$Q_{31} = P$

$Q_{34} = P/2$

**c.** calculation of the internal forces:

$Q_{43} = P/2 - P/L \cdot L = -P/2$

$Q_{24} = 0$

$Q_{42} = 0$

$M_{13} = 0$

$M_{31} = P \cdot L$

$M_{34} = P \cdot L$

$M_{43} = P \cdot L - P/L \cdot L \cdot l/2 + P/2 \cdot L = P \cdot L$

$M_{24} = P \cdot L$

$M_{42} = P \cdot L$

In fig.2.37 este prezentată starea de eforturi (diagramele de eforturi).

The interal forces' diagrams are shown in fig.2.37.

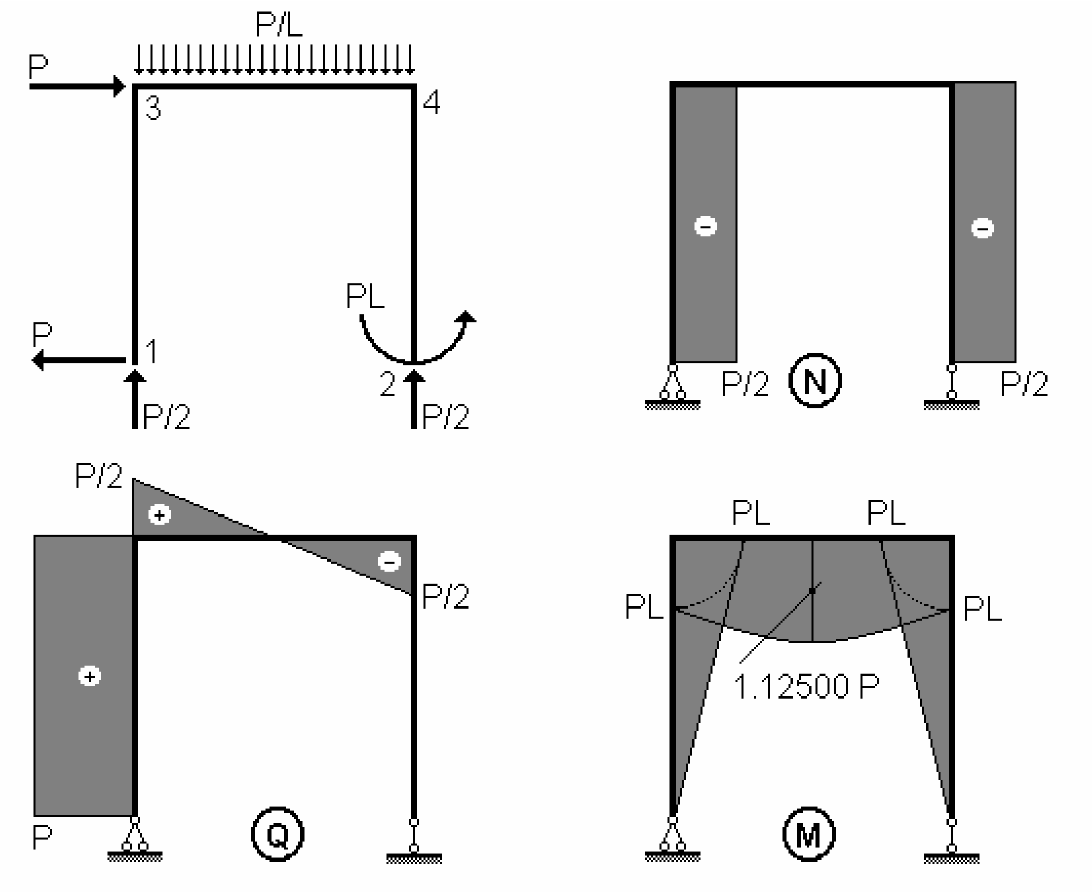



**Fig.2.37**

**Eforturile în cadrul simplu rezemat din fig.2.36.**

**Internal forces in the simply supported frame in fig.2.36.**

**d.** momentul încovoietor maxim pentru grinda **3-4:**

**d.** maximum bending moment in the bar **3-4:**

$$M_{max} = P/2 \cdot L/2 + P \cdot L - P/L \cdot L/2 \cdot L/4 = 1.12500\,PL$$

**e.** verificarea nodului **3**, fig.2.38:

**e.** verification of the joint **3**, fig.2.38:

$\sum M_3 = P \cdot L - P \cdot L = 0$ **(!)**

$\sum F_x = P - P = 0$ **(!)**

$\sum F_y = P/2 - P/2 = 0$ **(!)**

**f.** verificarea nodului **4**, fig.3.38:

**f.** verification of the joint **4**, fig.2.38:

$\sum M_4 = -P \cdot L + P \cdot L = 0$ **(!)**

$\sum F_x = 0$ **(!)**

$\sum F_y = P/2 - P/2 = 0$ **(!)**

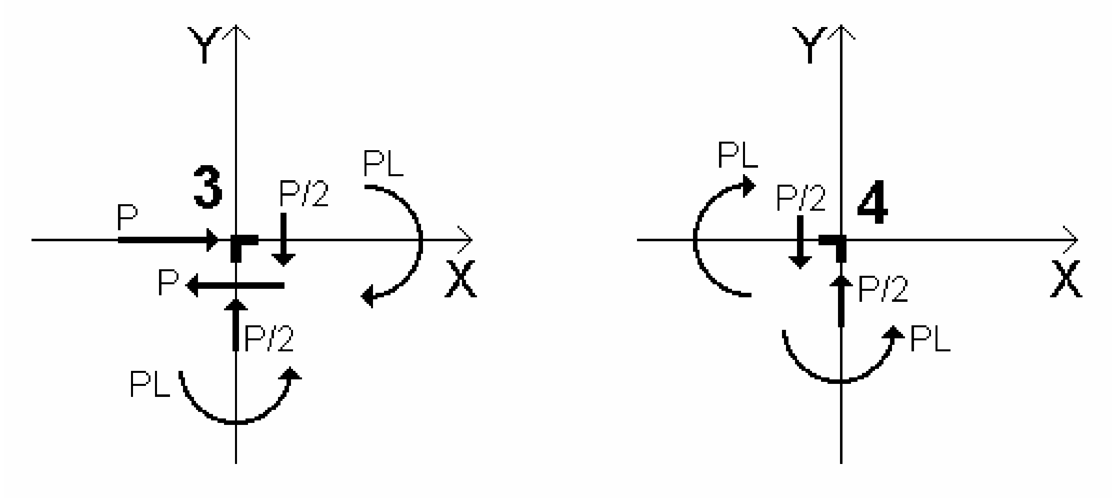



**Fig.2.38**

**Echilibrul nodurilor.** **Joints equilibrium.**

**E 2.7**

**Exemplu / Example 2.8**

Să se determine starea de eforturi pentru structura din fig.2.39.

Determine the internal forces in the structure shown in fig.2.39.

**a.** calculul reacțiunilor, fig.2.40:

**a.** calculation of the reactions, fig.2.40:

$$\sum M_A = 0: \quad R_4 \cdot (3 + 3/\cos 45^o) - 10 \cdot (3 + 3 \cdot \cos 45^o) \cdot (3 + 3 \cdot \cos 45^o)/2 + 50 + 30 \cdot 2 = 0$$

$$R_4 = 19.48731 \text{ KN}$$

$$\sum M_B = 0: \quad V_2 \cdot (3/\cos 45^o + 3)/\cos 45^o - 30 \cdot 2 + 50 + +10 \cdot (3 + 3/ /\cos 45^o) \cdot ((3/\cos 45^o + 3)/\cos 45^o - (3 + 3/\cos 45^o)) = 0$$

$$V_2 = 37.43359 \text{ KN}$$

$$\sum M_C = 0: \quad H_1 \cdot (3/\cos 45^o + 3)/\cos 45^o + 50 + 30 \cdot ((3/\cos 45^o + 3)/ /\cos 45^o - 2) - 10 \cdot (3 + 3 \cdot \cos 45^o) \cdot (3 + 3 \cdot \cos 45^o)/2 = 0$$

$$H_1 = -16.22039 \text{ KN}$$

**b.** verificarea reacțiunilor:

**b.** verification of the reactions:

$$\sum F_x = -16.22039 - 19.48731 \cdot \cos 45^o - 30 = 0 \quad \textbf{(!)}$$

$$\sum F_y = -10 \cdot (3 + 3/\cos 45^o) + 37.43359 + 19.48731 \cdot \cos 45^o = 0 \quad \textbf{(!)}$$

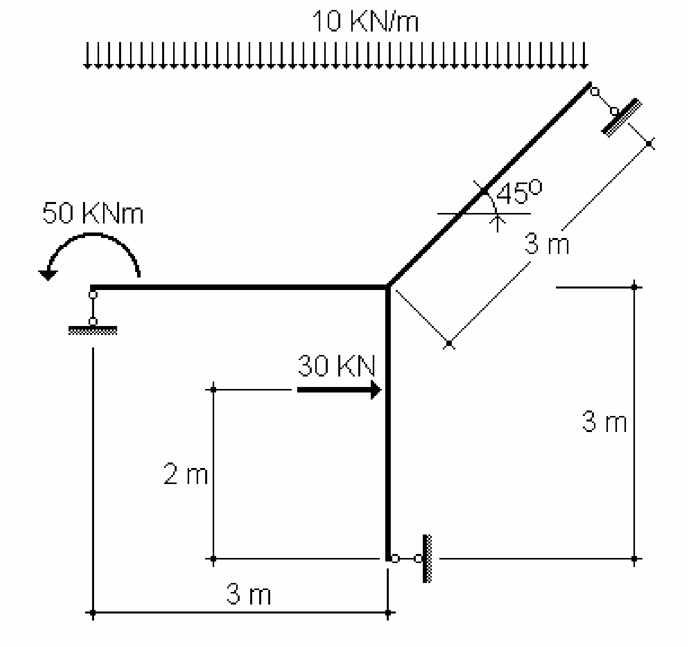



**Fig.2.39**

**Structură simplu rezemată.** **Simply supported structure.**

**c.** calculul eforturilor, fig.2.40 şi 2.41: **c.** calculation of the internal forces, fig.2.40 and 2.41:

$$N_{13} = 0 = N_{31}$$
$$N_{23} = 0 = N_{32}$$
$$N_{43} = 0$$
$$N_{34} = -10 \cdot 3 \cdot \cos 45^{o} \cdot \cos 45^{o} = -15.00000 KN$$

$$Q_{13} = 16.22039\, KN = Q_{D13}$$
$$Q_{31} = -13.77961\, KN = Q_{D31}$$
$$Q_{23} = 37.43359\, KN$$
$$Q_{32} = 37.43359 - 10 \cdot 3 = 7.43359\, KN$$
$$Q_{43} = -19.48731\, KN$$
$$Q_{34} = -19.48731 + 10 \cdot 3 \cdot \cos 45^{o} \cdot \cos 45^{o} = -4.48731\, KN$$

$$M_{13} = 0$$
$$M_{31} = 16.22039 \cdot 3 - 30 \cdot 1 = 18.66117\, KN$$
$$M_{D31} = 32.44078\, KNm = M_{D13}$$
$$M_{23} = 50.00000\, KN$$
$$M_{32} = 50.00000 + 37.43359 \cdot 3 - 10 \cdot 3 \cdot 1.5 = 17.30077\, KN$$
$$M_{43} = 0$$

$$M_{34} = 19.48731 \cdot 3 - 10 \cdot 3 \cdot \cos 45^{o} \cdot 3 \cdot \cos 45^{o} / 2 = 35.96194 \, KNm$$

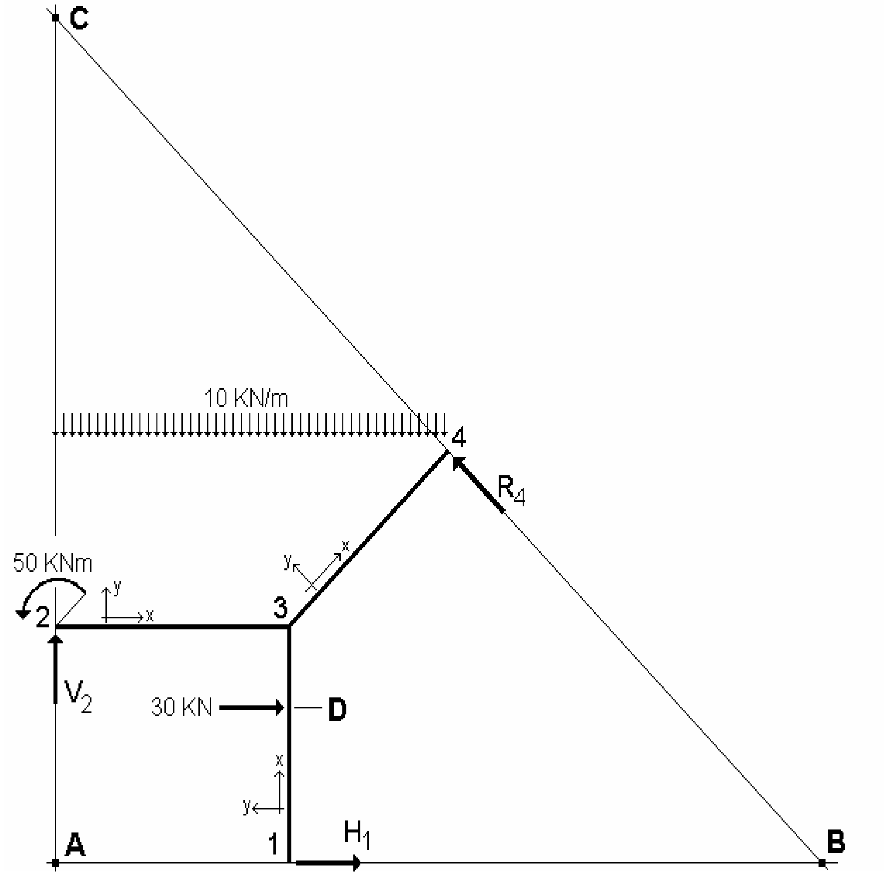



**Fig.2.40**

**Structura, acțiunile și forțele de legătură.** **Structure, loads and reactions at the supports.**

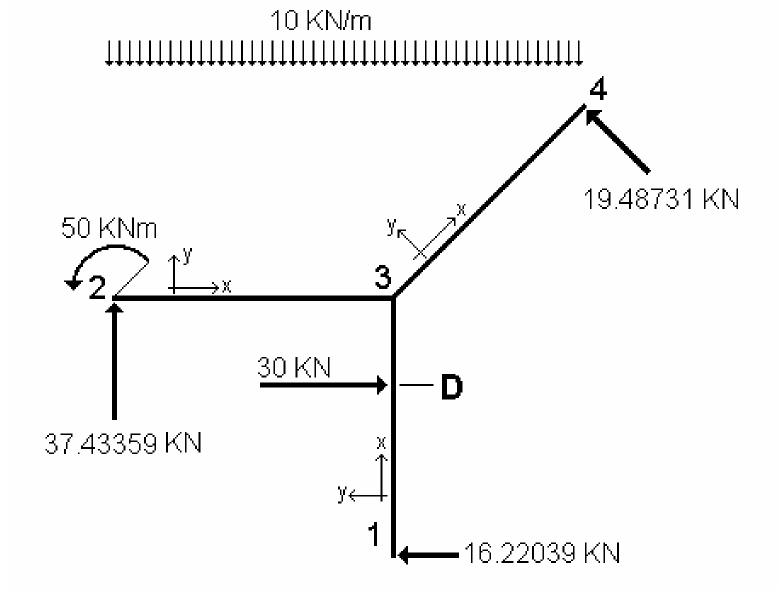



**Fig.2.41**

**Acțiunile şi forțele de legătură.**
In figurile 2.42 şi 2.43 este prezentată starea de eforturi pentru fiecare bară a structurii.

**Loads and reactions at the supports.**
Figures 2.42 and 2.43 show the internal forces for each bar of the structure.

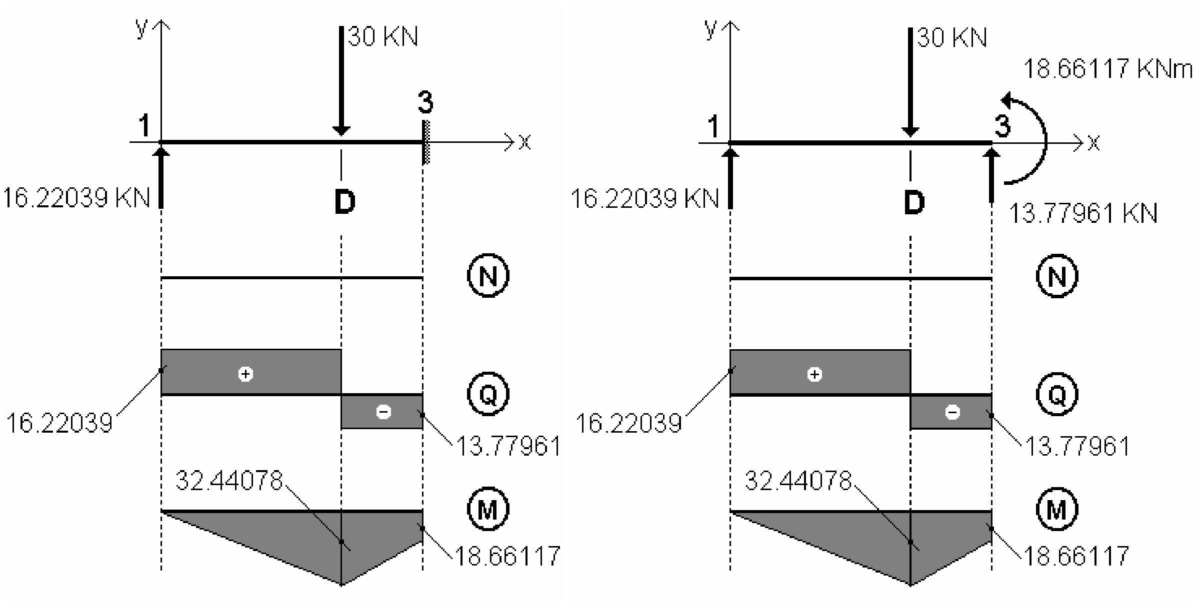



**Fig.2.42**

**Eforturile în bara 1-3.**
a. - bara considerată încastrată în structură,
b. - bara decupată, cu efectele structurii îndepărtate

**Internal forces in bar 1-3.**
a. - bar clamped to the structure,
b. - isolated bar with the effects of the removed structure

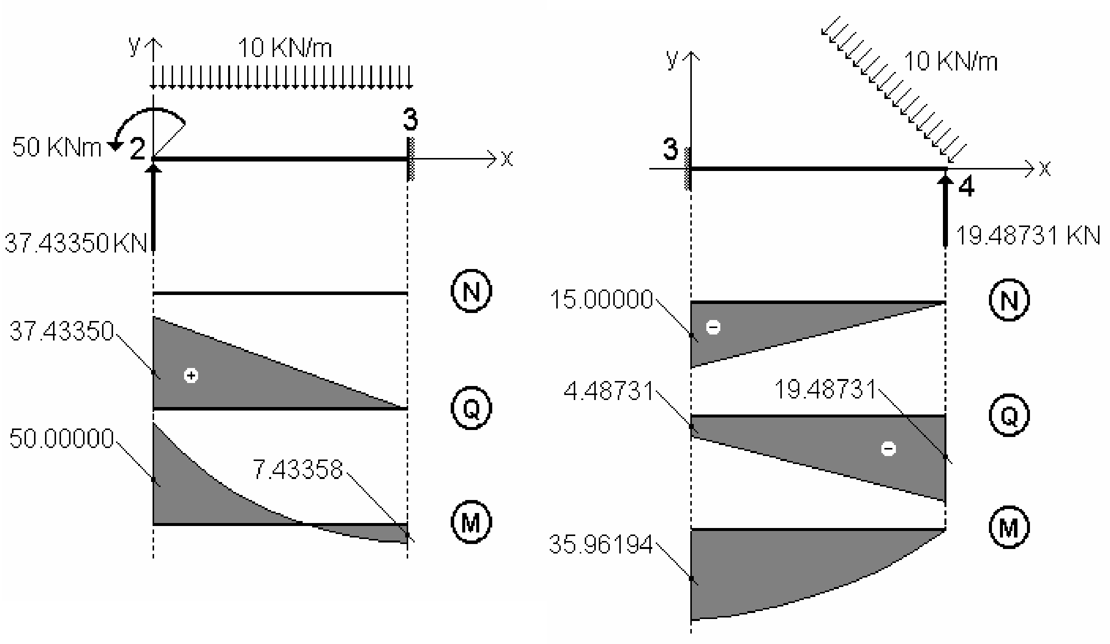



Fig.2.43

**Eforturi in barele 2-3 şi 3-4.** **Internal forces in the bars 2-3 and 3-4.**

**d.** verificarea nodului **3**, fig.2.44: **d.** verification of joint **3**, fig.2.44:

$$\sum M_3 = 17.30077 - 35.96194 + 18.66117 = 0 \quad \textbf{(!)}$$

$$\sum F_x = 13.77961 - 4.48731 \cdot \cos 45^o - 15.00000 \cdot \cdot \cos 45^o = 0 \quad \textbf{(!)}$$

$$\sum F_y = 7.43359 + 4.48731 \cdot \cos 45^o - 15.00000 \cdot \cdot \cos 45^o = 0 \quad \textbf{(!)}$$

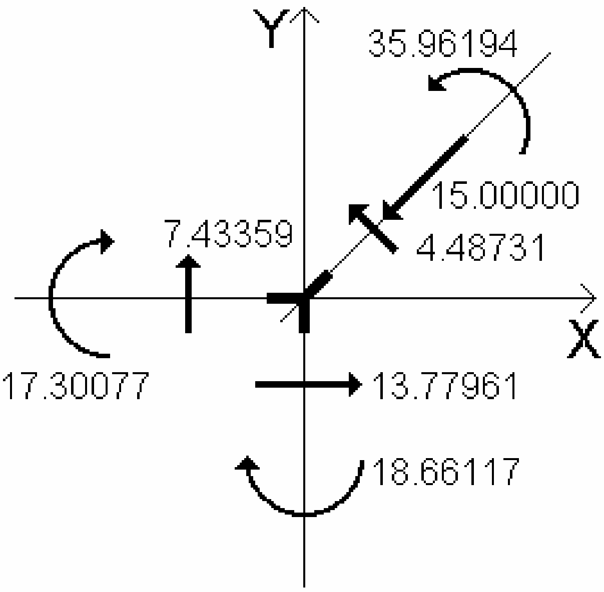



**Fig.2.44**

**Echilibrul nodului 3.** **Equilibrium of joint 3.**

| **E 2.8** ✍ |
|---|

| **Exemplu / Example 2.9** |
|---|

Să se determine starea de eforturi pentru cadrul cu trei articulații din fig.2.45.a.

Determine the internal forces in the three-pinned frame shown in fig.2.45.a.

**a.** calculul reacțiunilor, fig.2.45.b: **b.** calculation of the reactions, fig.2.45.b:

$$\sum M_1 = 0: \quad V_2 \cdot 2L + pL^2 - pL \cdot 3/2L - p \cdot L \cdot L/2 - 2pL \cdot L/2 = 0$$

$$V_2 = pL$$

$$\sum M_2 = 0: \quad -V_1 \cdot 2L - 2pL \cdot L/2 + p \cdot L \cdot 3/2L + pL \cdot L/2 + pL^2 = 0$$

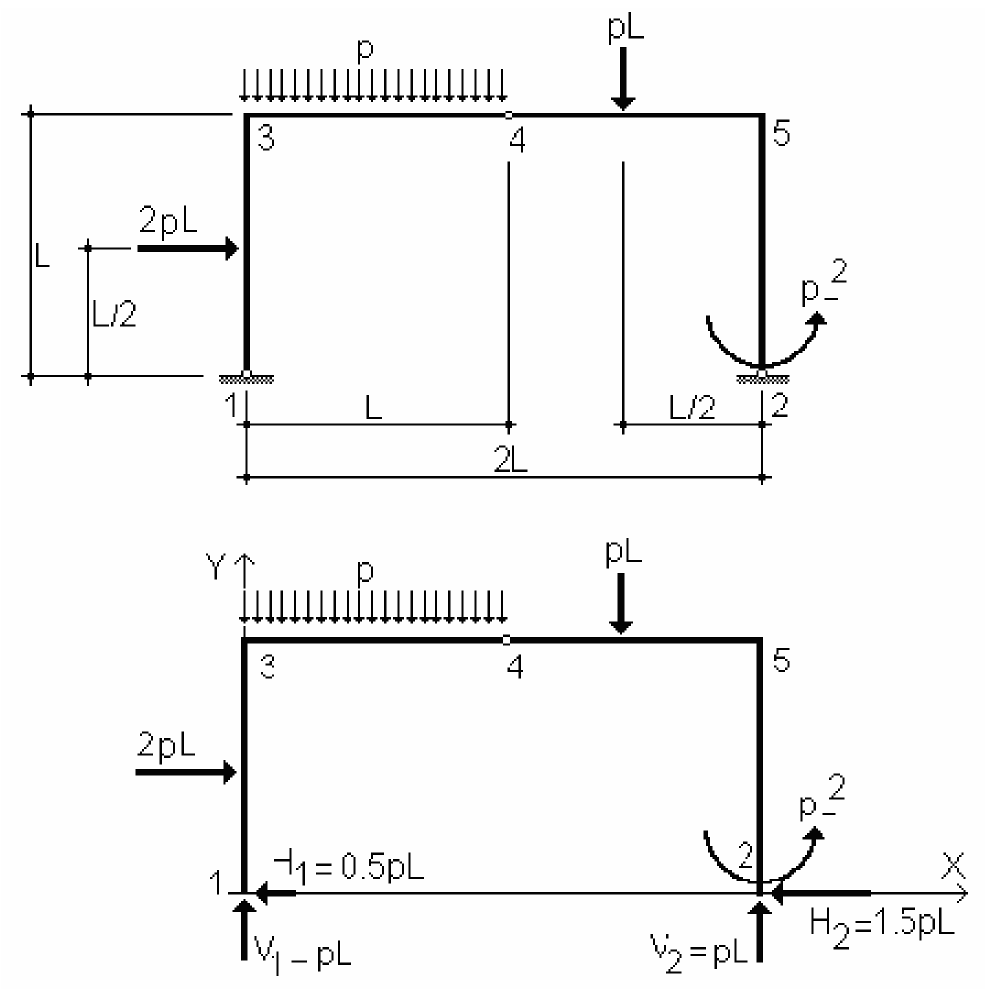
$$V_1 = pL$$

$\sum M_{4\text{-}1} = 0$: $\quad - H_1 \cdot L - pL + 2pL \cdot L/2 + p \cdot L \cdot L/2 = 0$

$H_1 = pL/2$

$\sum M_{4\text{-}2} = 0$: $\quad - H_2 \cdot L + pL \cdot L + pL^2 - pL \cdot L/2 = 0$

$H_2 = 3/2pL$




a.

b.

**Fig.2.45**

**Cadru cu trei articulații.**
a.- structura, b - acțiunile și reacțiunile.

**Three pinned frame.**
a. - structure, b. - loads and reactions at supports.

**b.** verificarea reacțiunilor:

**b.** verification of the reactions:

$\sum F_x = 2pL - 0.5pL - 1.5pL = 0$ **(!)**

$\sum F_y = pL + pL - p \cdot L - pL = 0$ **(!)**

In fig.2.46 este reprezentată starea de eforturi pentru cadrul cu trei articulații din fig.2.45.

Fig.2.46 shows the internal forces in the three pinned frame in fig 2.45.

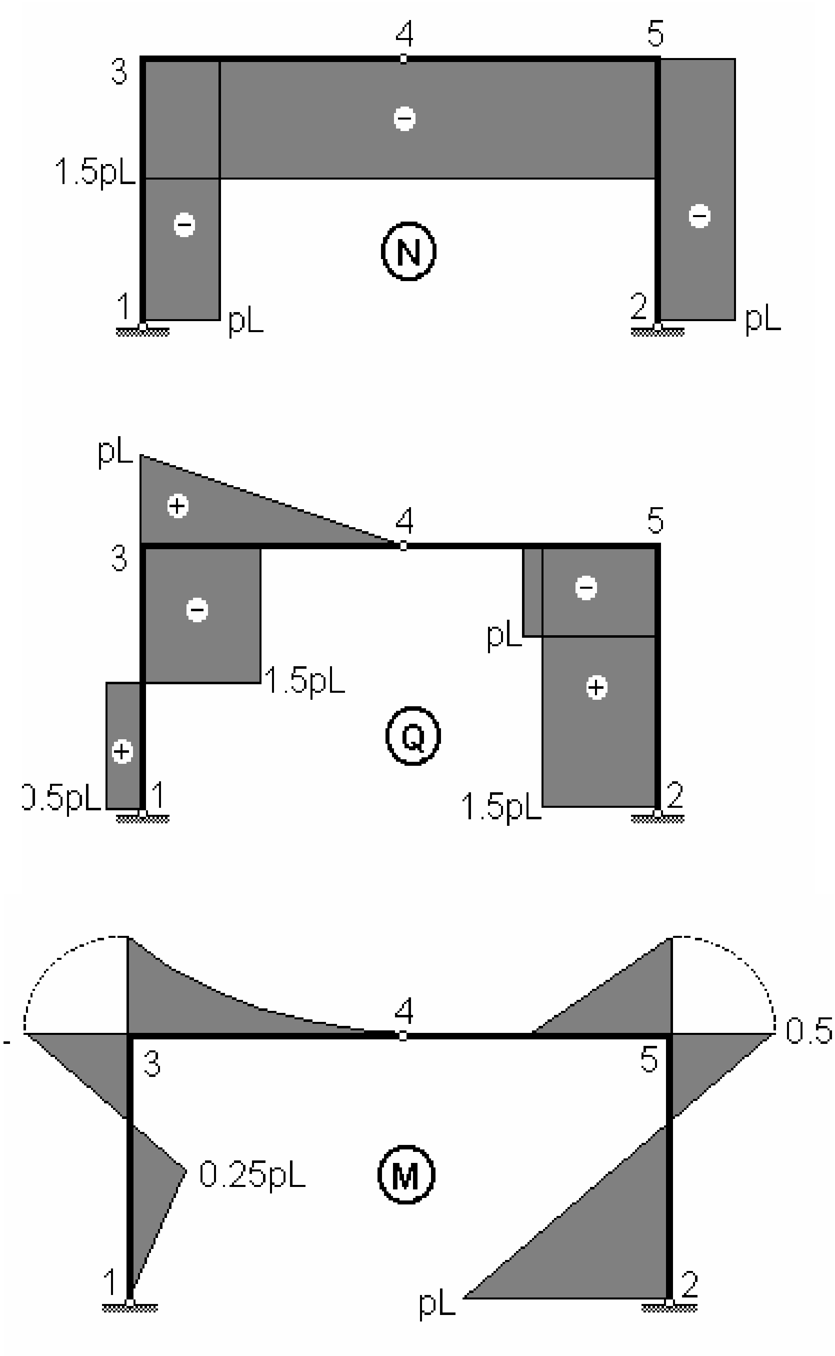



**Fig.2.46**

**Eforturile din cadrul cu trei articulații din fig.2.45.**

**Internal forces of the three pinned frame in fig 2.45.**

| |
|---|
| **E 2.9** ✍ |
| **Exemplu / Example 2.10** |

Să se reprezinte starea de eforturi pentru structura cu tirant din fig.2.47.

Draw the internal forces' diagrams for the structure with a tie-rod shown in fig.2.47.

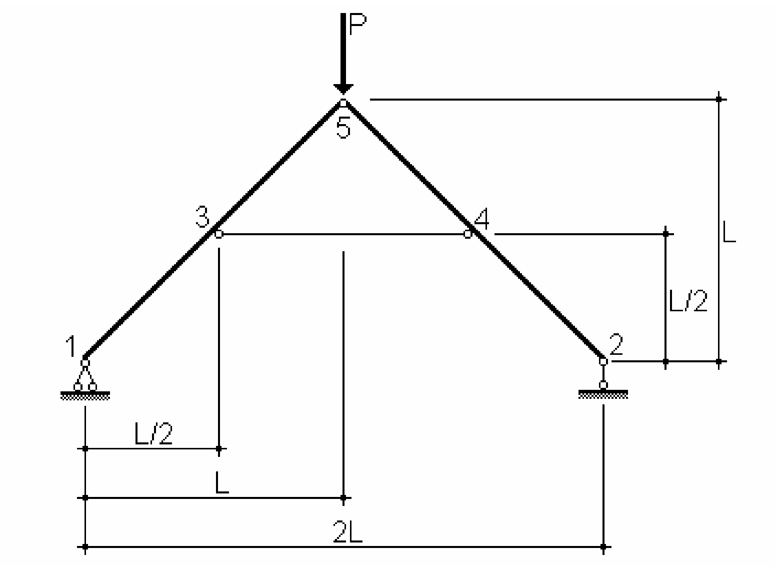



**Fig.2.47**

**Structură cu tirant.**

**Structure with a tie-rod.**

Reacțiunile structurii sunt prezentate în fig.2.48.a.

The reactions of the structure are shown in fig.2.48.a.

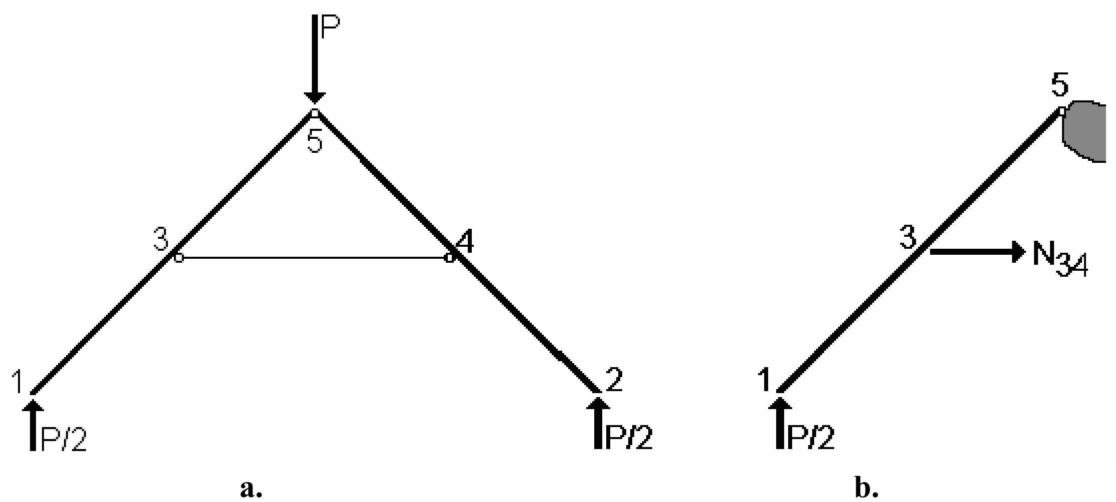



**Fig.2.48**

**Acțiuni, reacțiuni și efortul din tirant.**
a. - reacțiunile din reazeme, b. - echilibru tronsonului 1-3-5

**Load, reactions at supports and force in the tie-rod.**
a. - reactions at supports, b. - equilibrium of part 1-3-5

**a.** calculul efortului din tirant 3-4, fig.2.48.b:

**a.** calculation of the force in the tie-rod 3-4, fig.2.48.b:

$$\sum M_{5\text{-}1} = 0: \qquad N_{34} \cdot L/2 - P/2 \cdot L = 0$$

$$N_{34} = P$$

Pentru a determina efortul din tirantul 3-4 există, de asemenea, posibilitatea de a scrie echilibrul pentru tronsonul 2-4-5.

In order to calculate the force in the tie-rod 3-4, the equilibrium of the part 2-4-5 can also be considered.

In fig.2.49 este prezentată starea de eforturi a structurii cu tirant din fig.2.47.

Fig.2.49 shows the internal forces in the structure with the tie-rod in fig.2.47.

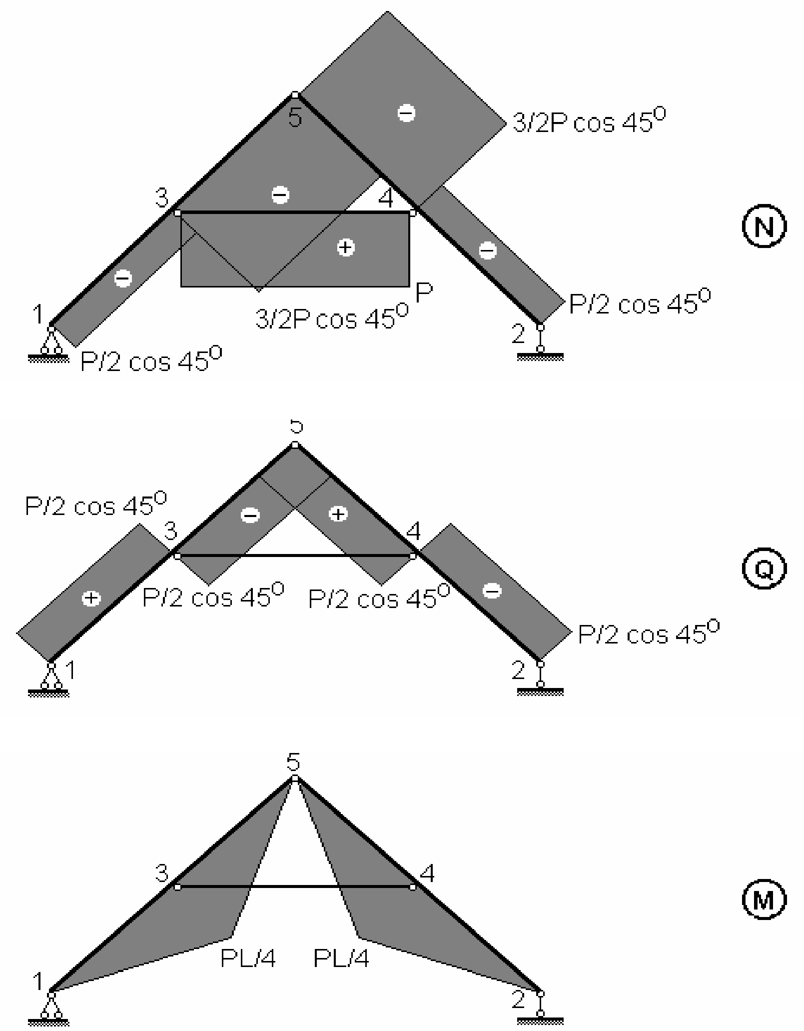



**Fig.2.49**

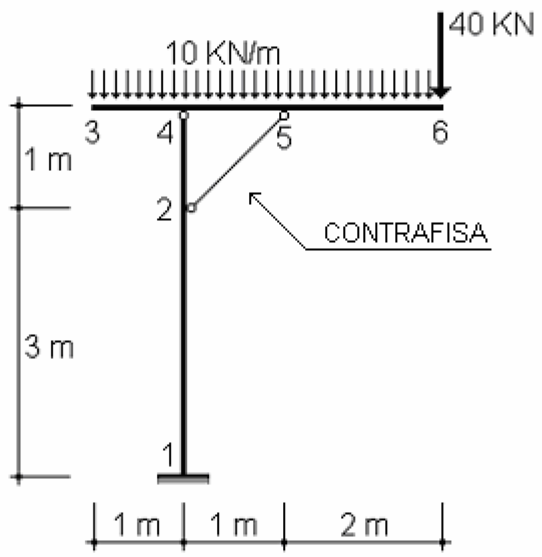
**Eforturile din structura cu tirant din fig.2.47.**

**Internal forces in the structure with the tie-rod in fig 2.47.**

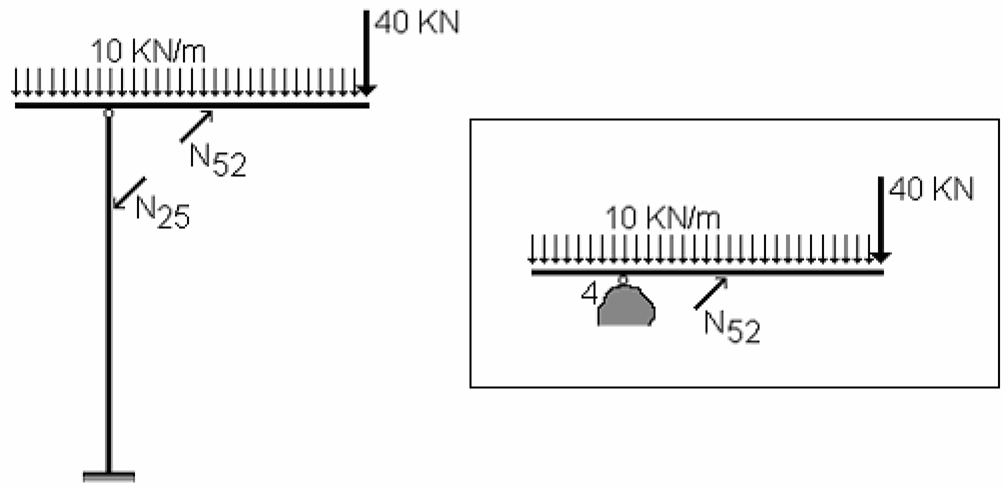
| **E 2.10** ✍ |
| --- |
| **Exemplu / Example 2.11** |

Să se reprezinte starea de eforturi pentru structura cu o contrafişă din fig.2.50.a.

Draw the internal forces' diagrams for the structure with a strut shown in fig.2.50.a.




a.




b.

**Fig.2.50**

**Structură cu contrafişă.** **Structure with strut.**

**a.** calculul efortului din contrafişa **2-5**, fig.2.50.b

**a.** calculation of the force in the strut **2-5**, fig.2.50.b:

$$\sum M_{4(3\text{-}6)} = 0: \qquad -10 \cdot 4 \cdot (2-1) - 40 \cdot 3 + N_{25} \cdot 1 \cdot \cos 45^{o} = 0$$

$$N_{25} = 226.27417\,\mathrm{KN}$$

In fig.2.51 este prezentată starea de eforturi din structura cu contrafişă din fig.2.50.

Fig.2.51 shows the internal forces in the structure with a strut in fig.2.50.

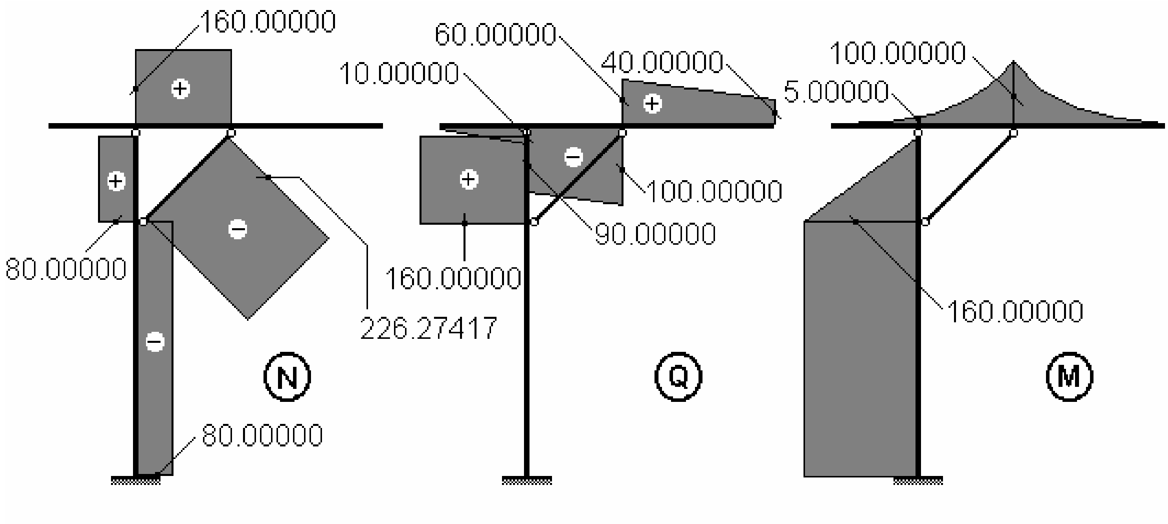



**Fig.2.51**

**Eforturile structurii cu contrafişă din fig.2.50.**

**Internal forces in the structure with strut in fig 2.50.**

**E 2.11**

**Exemplu / Example 2.12**

Să se reprezinte starea de eforturi pentru structura compusă din fig.2.52.

Draw the internal forces for the compound structure shown in fig.2.52.

Pentru a determina forțele de legătură din structură, există două posibilități:

- descompunerea structurii în sisteme secundare şi principale, fig.2.53;
- echilibrul ansamblului şi echilibrul pentru toate substructurile sale, fig.2.54.

There are two options to calculate the reactions in the structure:

- braking up the structure in secondary and principal systems, fig.2.53;
- equilibrium of the whole structure and equilibrium of all its subsystems, fig.2.54.

In primul caz, se determină reacțiunile pentru sistemul secundar **(3-5-6)** şi apoi pentru sistemul principal **(1-2-3-4),** folosind următoarele ecuații de echilibru:

In the first case, the reactions of the secondary system are calculated **(3-5-6)** followed by the reactions of the principal system **(1-2-3-4)**, by using the following equations of equilibrium:

**a.** pentru sistemul secundar **(3-5-6):** **a.** for the secondary system **(3-5-6)**:

$\sum M_3 = 0:$ $V_5 \cdot 2 \cdot L - P \cdot L = 0$

$V_5 = P/2$

$\sum M_5 = 0:$ $V_3 \cdot 2 \cdot L + P \cdot L = 0$

$V_3 = P/2$

$\sum F_x = 0:$ $H_3 = 0$

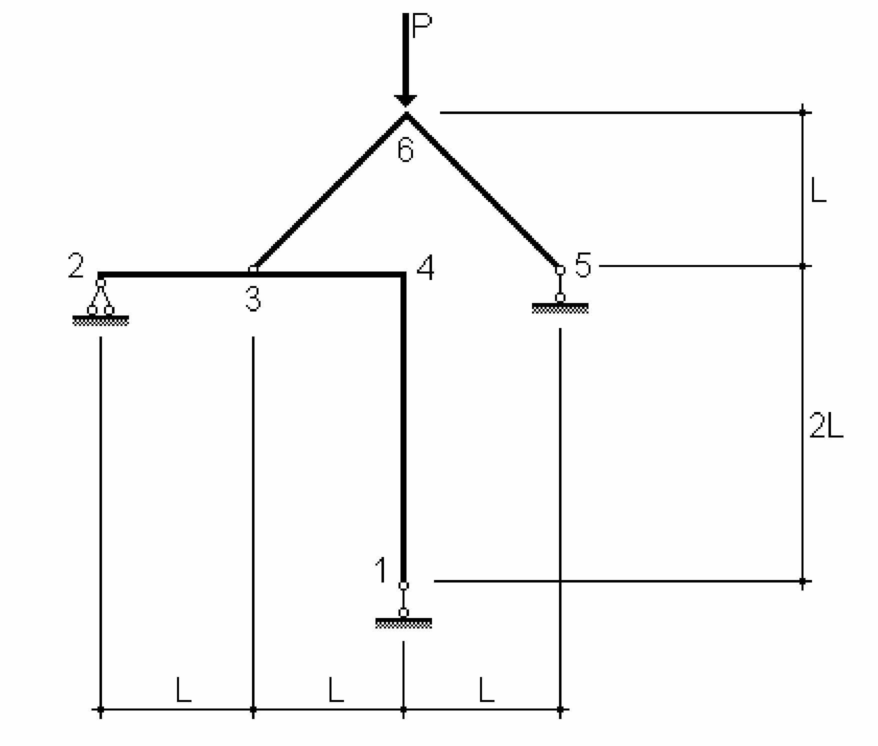



**Fig.2.52**

**Structură compusă.** **Compound structure.**

**b.** pentru sistemul principal **(1-2-3-4)** : **b.** for the principal system **(1-2-3-4)**:

$\sum M_2 = 0:$ $V_1 \cdot 2 \cdot L - P/2 \cdot L = 0$

$V_1 = P/4$

$\sum M_1 = 0:$ $-V_2 \cdot 2 \cdot L + P/2 \cdot L = 0$

$V_2 = P/4$

$\sum F_x = 0:$ $H_2 = 0$

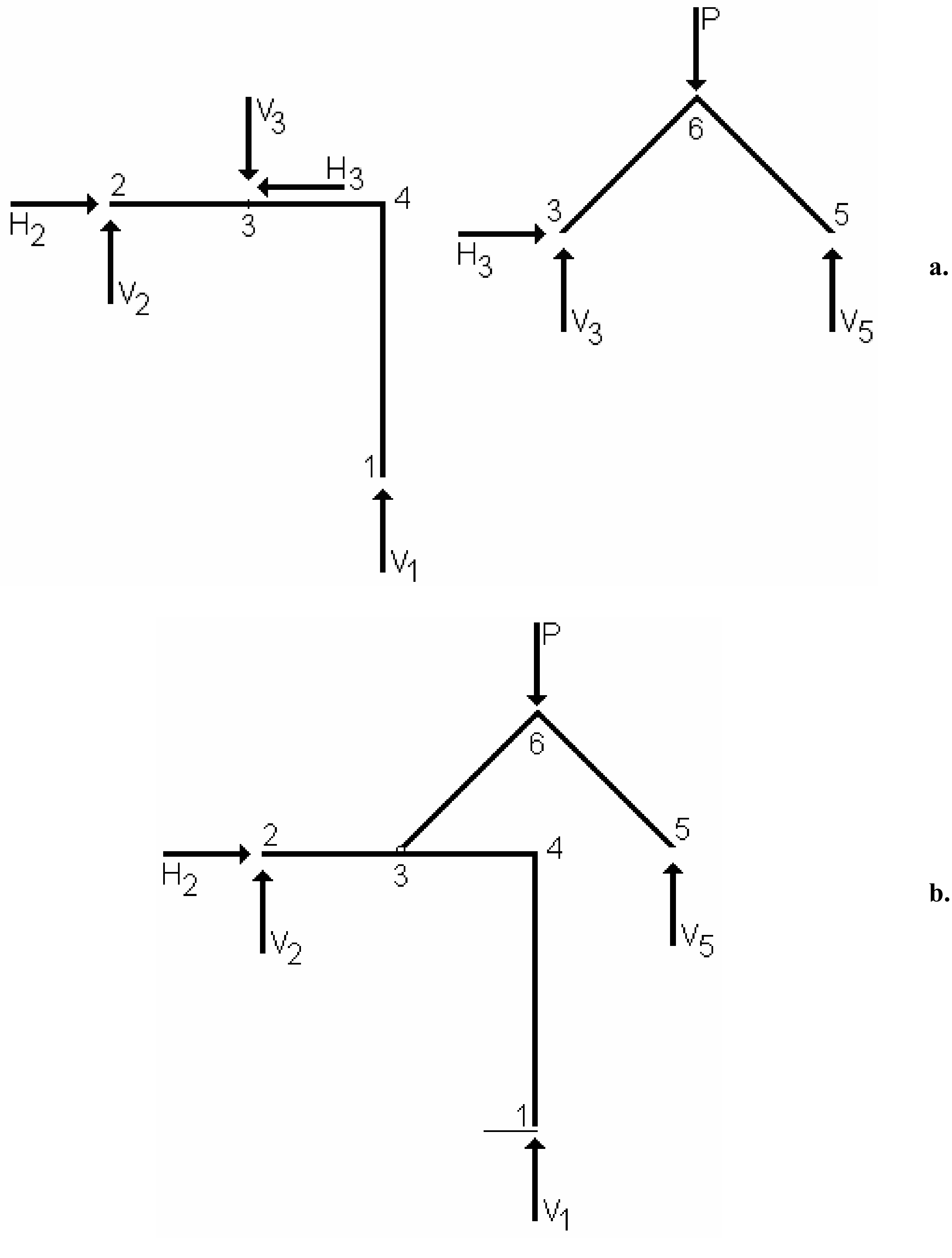



**Fig.2.53**

**Calculul reacțiunilor pentru structura din fig.2.52.**

a. - descompunerea structurii în sisteme secundare şi principale, b. - echilibrul ansamblului şi echilibrul pentru toate substructurile sale

**Calculation of the reactions of the structure in fig. 2.52.**

a. - braking up the structure in secondary and principal systems,

b. - equilibrium of the whole structure and equilibrium of all its subsystems

Pentru ansamblu, se utilizează următoarele ecuații de echilibru:

For the whole structure, the following equations of equilibrium can be used:

$$\sum M_3^{3\text{-}5} = 0: \qquad V_5 \cdot 2 \cdot L - P \cdot L = 0$$
$$V_5 = P/2$$

$$\sum M_2 = 0: \qquad V_1 \cdot 2 \cdot L - P \cdot 2 \cdot L + P/2 \cdot 3 \cdot L = 0$$
$$V_1 = P/4$$

$$\sum F_x = 0: \qquad H_2 = 0$$

In fig.2.54 este prezentată starea de eforturi a structurii compusă din fig.2.52.

Fig.2.54 shows the internal forces in the compound structure in fig.2.52.

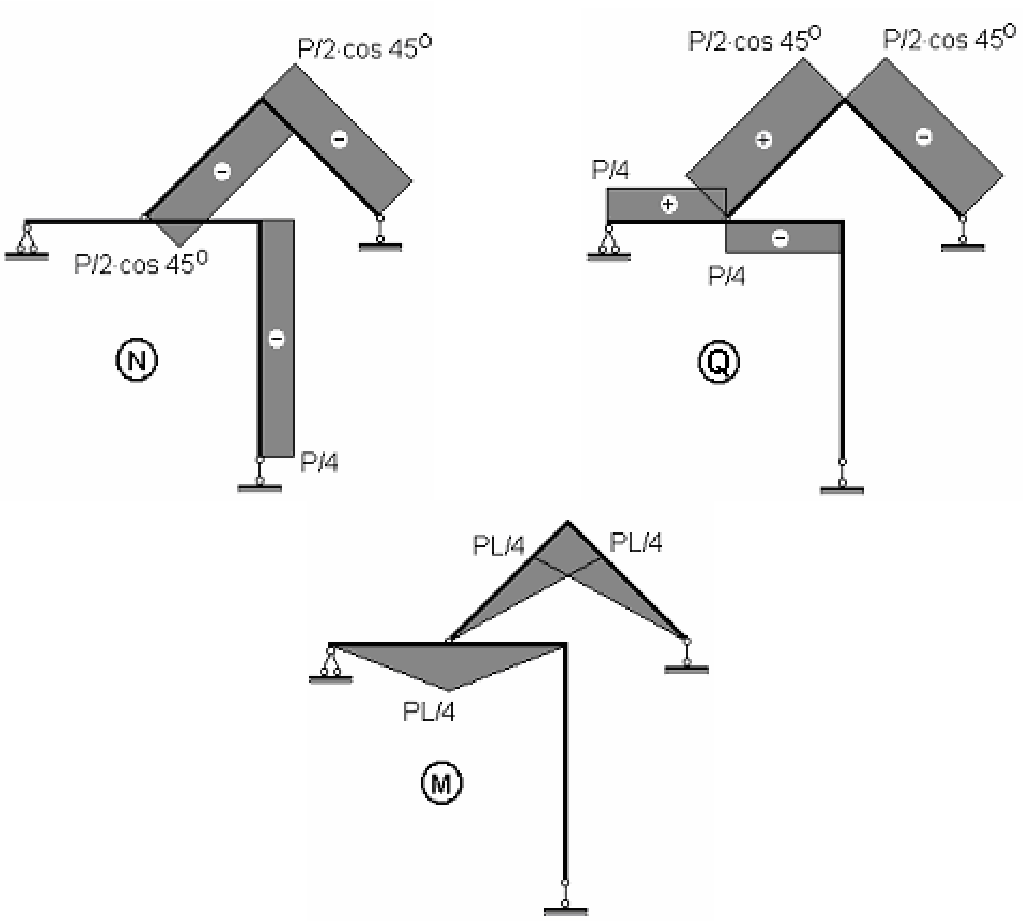



**Fig.2.54**

**Eforturile în structura compusă din fig.2.52.**

**Internal forces in the compound structure in fig.2.52.**

**E 2.12**

## 2.4 BARE CURBE SI ARCE

In raport cu alte structuri, la care dacă se cunosc eforturile la extremitătile barelor se pot reprezenta diagramele de eforturi, la barele curbe acest lucru este dificil, deoarece eforturile depind de incărcare şi raza de curbură (vezi relațiile diferențiale 1.13 .... 1.14).

In consecință, vom diviza barele în tronsoane, numite **bolțari**, la extremitățile cărora vom calcula eforturile. Forma diagramei este aproximată, în lungul barei, printr-o linie dreaptă sau o curbă.

Divizarea în tronsoane se realizează pe axul curb în tronsoane echidistante, fig.2.55.

## 2.4 CURVED BARS AND ARCHES

Compared to other structures for which the internal forces' diagrams can be drawn if the internal forces at the end of the bars are known, in the case of curved bars this is difficult to perform since these forces depend on the loading and the radius of curvature (see the differential relationships 1.13...1.14).

Consequently, the bars are divided into elements, called **voussoirs**, at the ends of which the internal forces will be calculated. The shape of the internal forces' diagram is approximated along the bar by a straight line or a curve.

The division into elements is carried out on the curved axis, into equidistant elements, fig.2.55.

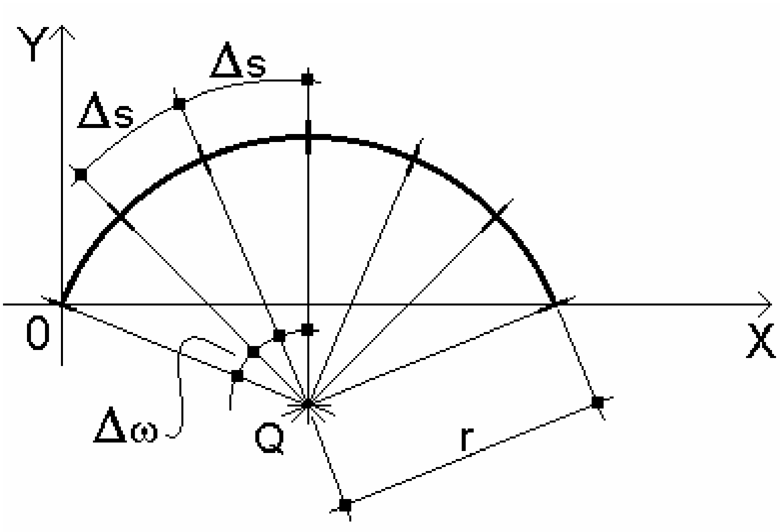



**Fig.2.55**

**Divizarea în tronsoane pe axul curb.** **Division in elements on the curved axis.**

La barele curbe care au o formă diferită de cea circulară, divizarea în bolțari egali pe axul curb este mai dificilă şi, în consecință, se face divizarea în tronsoane cu pas egal în lungul abscisei, fig.2.56.

In the case of curved bars with a shape different from the circular one, the division into equal voussoirs on the curved axis is more difficult to be done, consequently the division into elements is carried out at equal steps along the abscissa, fig.2.56.

Aceast procedeu este utilizat când axul curb este dezvoltat în special în lungul axei OX.

This procedure is particularly used when the curved axis is developed along the OX axis.

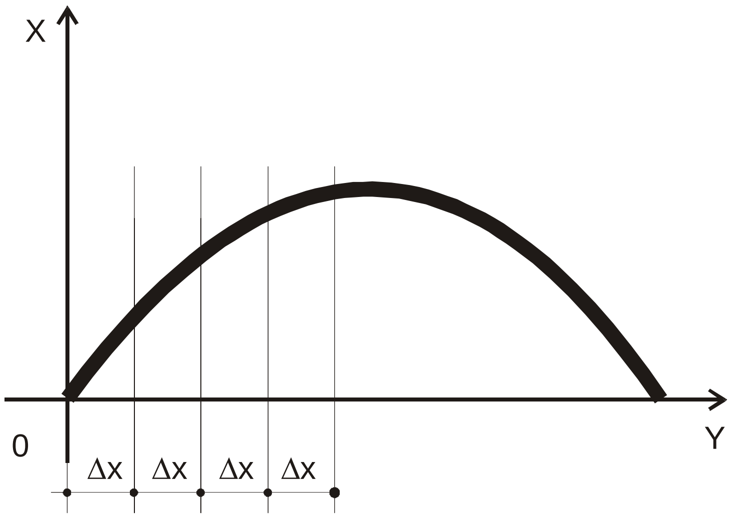



**Fig.2.56**

**Impărțirea în tronsoane - axul curb este dezvoltat în lungul axei OX.**

**Division into elements - curved axis developed along the OX axis.**

Pentru barele curbe dezvoltate după axa OY, se poate utiliza împărțirea în tronsoane cu pas egal urmărind ordonata, fig.2.57.

In the case of curved bars developed along the OY axis, the division into sections can be carried out along the ordinate, fig.2.57.

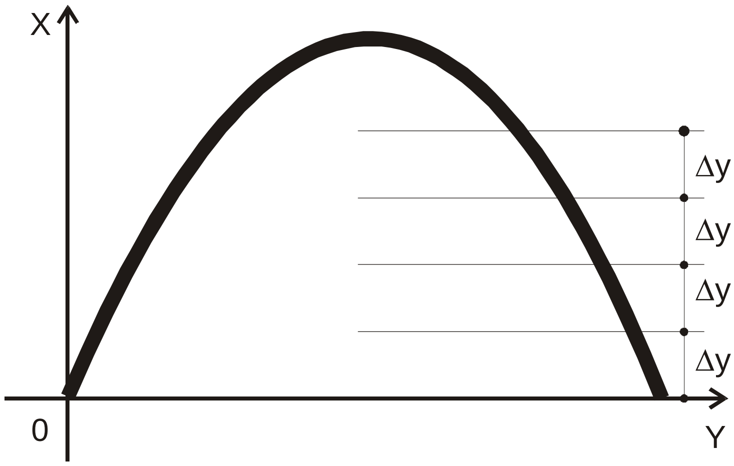



**Fig.2.57**

**Impărțirea în tronsoane - axul curb este dezvoltat în lungul axei OY.**

**Division into elements - curved axis developed along the OY axis.**

In domeniul construcțiilor, forma axei curbe a barelor este de obicei un arc de cerc sau o parabolă.

In civil enginering structures, the shape of the curved axis of bars is usually a circular arc or a parabola.

In ceea ce priveşte eforturile din barele curbe, ținând cont de definiția lor, în fiecare secțiune caracteristică a barei se stabileşte un sistem de axe orientate în lungul tangentei la axul curb al barei, fig.2.58.

As regards to the internal forces in the curved bars, based on their definition, a coordinate system along the tangent to the axis of the curved bar is attached to each characteristic section of the bar, fig.2.58.

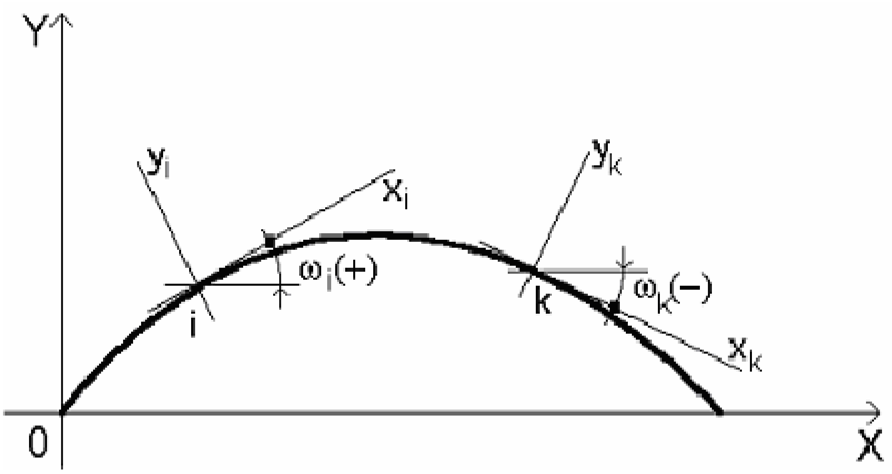



**Fig.2.58**

**Sistemul de axe ataşat fiecărei secțiuni a unei axe curbe.**

**Coordinate system attached to each section of a curved axis.**

Sistemul de axe ataşat fiecărei secțiuni face cu sistemul de axe general XOY un unghi ω, care se consideră pozitiv când are sens trigonometric şi este negativ când este măsurat în sens orar.

The coordinate system attached to each section forms an angle ω with the global coordinate system XOY. This angle is considered positive when it is measured anticlockwise and negative when it is measured clockwise.

In aceste condiții, cea mai simplă metodă de a calcula eforturile este aceea a matricei de transformare unghiulară utilizată, de asemenea, şi la alte structuri.

In this case, the simpleast method to calculate the internal forces is the angular transformation matrix which is also used for other structures.

**Exemplu / Example 2.13**

Să se determine starea de eforturi pentru bara curbă arc de cerc, prezentată în fig.2.59.

Determine the inernal forces in the curved bar - circular arc shown in fig.2.59.

Bara a fost divizată în 6 tronsoane egale, corespunzător unui unghi de 30 de grade.

The bar is divided into 6 equal elements, corresponding to a 30 degree angle.

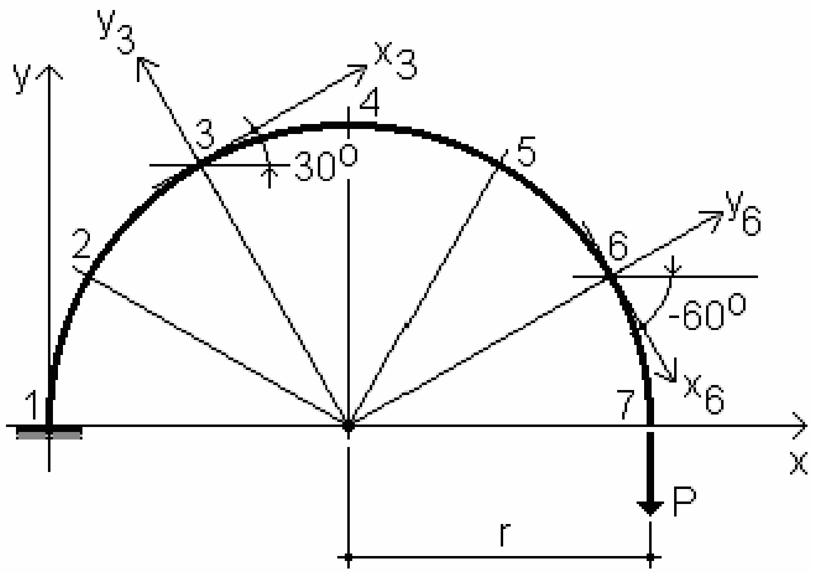



**Fig.2.59**

**Bară curbă încastrată.**

**Cantilever curved bar.**

Vectorii eforturilor Nx şi Qy în raport cu sistemul de axe XOY au aceeaşi valoare în toate secțiunile caracteristice:

The vectors of the normal force Nx and shear force Qy with respect to the coordinate system XOY have the same value at all the characteristic sections:

$$\{E\}_{ij} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ M_{ij} \end{Bmatrix}$$

şi momentele încovoietoare sunt următoarele:

and the bending moments are the following :

$$M_{76} = 0$$
$$M_{67} = -P \cdot (r - r \cdot \cos 30^o) = -0.13397 \cdot P \cdot r = M_{65}$$
$$M_{56} = -P \cdot (r - r \cdot \cos 60^o) = -0.50000 \cdot P \cdot r = M_{54}$$
$$M_{45} = -P \cdot r \ \ = M_{43}$$
$$M_{34} = -P \cdot (r + r \cdot \cos 60^o) = -1.50000 \cdot P \cdot r = M_{32}$$
$$M_{23} = -P \cdot (r + r \cdot \cos 30^o) = -1.86603 \cdot P \cdot r = M_{21}$$
$$M_{12} = -P \cdot 2 \cdot r \ \ = -2 \cdot P \cdot r$$

**a.** matricea de transformare unghiulară:

**a.** angular transformation matrix:

$$[t]_{07} = \begin{bmatrix} \cos(-90) & -\sin(-90) & 0 \\ \sin(-90) & \cos(-90) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[t]_{06} = \begin{bmatrix} \cos(-60) & -\sin(-60) & 0 \\ \sin(-60) & \cos(-60) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.50000 & 0.86603 & 0 \\ -0.86603 & 0.50000 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[t]_{05} = \begin{bmatrix} \cos(-30) & -\sin(-30) & 0 \\ \sin(-30) & \cos(-30) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.86603 & 0.50000 & 0 \\ -0.50000 & 0.86603 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[t]_{04} = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 & 0 \\ \sin(30) & \cos 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[t]_{03} = \begin{bmatrix} \cos(30) & -\sin(30) & 0 \\ \sin(30) & \cos(30) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.86603 & -0.50000 & 0 \\ 0.50000 & 0.86603 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[t]_{02} = \begin{bmatrix} \cos(60) & -\sin(60) & 0 \\ \sin(60) & \cos(60) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.50000 & -0.86603 & 0 \\ 0.86603 & 0.50000 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[t]_{01} = \begin{bmatrix} \cos(90) & -\sin(90) & 0 \\ \sin(90) & \cos(90) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**b.** vectorii eforturilor la extremitățile tronsoanelor:

**b.** vectors of the internal forces at the ends of the elements:

$$\{e\}_{76} = [t]_{07} \cdot \{E\}_{76} = \begin{Bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{e\}_{67} = [t]_{06} \cdot \{E\}_{67} = \begin{Bmatrix} 0.86603\,P \\ 0.50000\,P \\ -0.13397\,P \cdot r \end{Bmatrix} = \{e\}_{65}$$

$$\{e\}_{56} = [t]_{05} \cdot \{E\}_{56} = \begin{Bmatrix} 0.50000\,P \\ 0.86603\,P \\ -0.50000\,P \cdot r \end{Bmatrix} = \{e\}_{54}$$

In fig.2.60 sunt prezentate diagramele de eforturi, trasate pe axa barei curbe.

Figure 2.60 shows the internal forces' diagrams drawn on the axis of the curved bar.

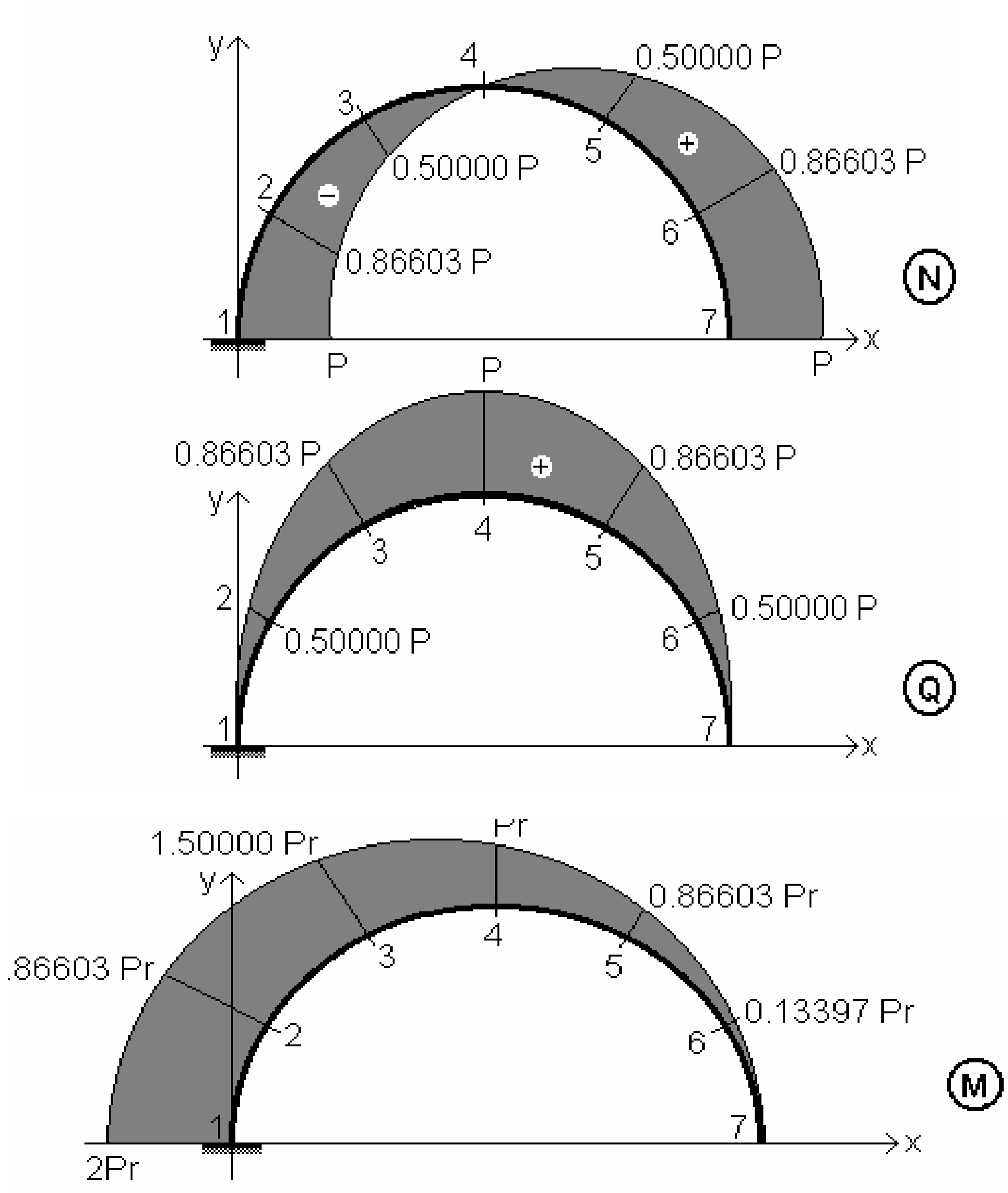



**Fig.2.60**

**Eforturile în bara curbă din fig.2.59.**

**Internal forces in the curved bar in fig.2.59.**

$$\{e\}_{45} = [t]_{04} \cdot \{E\}_{45} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ -P \cdot r \end{Bmatrix} = \{e\}_{43}$$

$$\{e\}_{34} = [t]_{03} \cdot \{E\}_{34} = \begin{Bmatrix} -0.50000\,P \\ 0.86603\,P \\ -1.50000\,P \cdot r \end{Bmatrix} = \{e\}_{32}$$

$$\{e\}_{23} = [t]_{02} \cdot \{E\}_{23} = \begin{Bmatrix} -0.86603\,P \\ 0.50000\,P \\ -1.86603\,P \cdot r \end{Bmatrix} = \{e\}_{21}$$

$$\{e\}_{12} = [t]_{01} \cdot \{E\}_{12} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \\ -2 \cdot P \cdot r \end{Bmatrix} = \{e\}_{21}$$

**E 2.13** ✍

**Exemplu / Example 2.14**

Să se determine starea de eforturi pentru arcul de cerc, simplu rezemat, prezentat în fig.2.61.

Determine the internal forces in the simply supported circular arc shown in fig. 2.61.

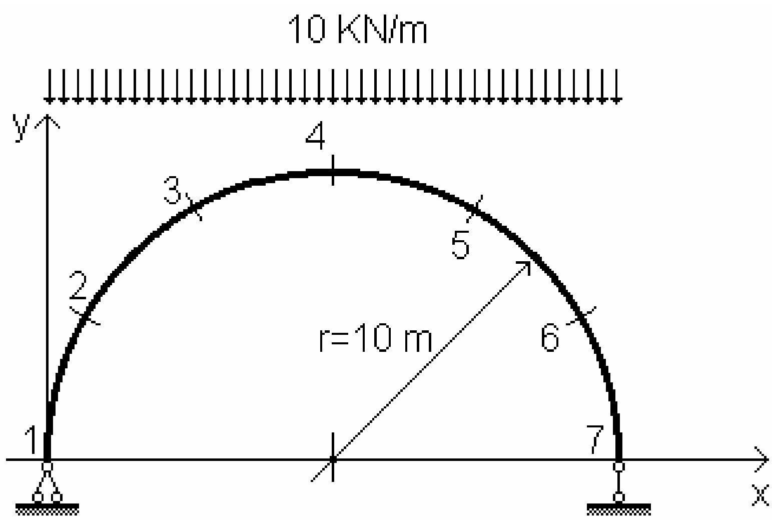



**Fig.2.61**

**Arc de cerc simplu rezemat.** **Simply supported circular arc.**

Bara a fost împărțită în 6 tronsoane, ca în exemplul 2.13, ceea ce înseamnă că matricele de transformare sunt aceleaşi.

Cele două reacțiuni din articulația (**1**) şi reazemul simplu (**7**) sunt egale cu jumătate din sarcina uniform distribuită ( V1=V7=100 KN ).

Din suma proiecțiilor tuturor forțelor în lungul axei OX egală cu zero, rezultă că reacțiunea orizontală din articulație este nulă.

Vectorii eforturilor în raport cu sistemul de axe XOY sunt:

The bar was divided into 6 elements as in the example 2.13, which means that the transformation matrices are the same.

The two reactions at the pin support (**1**) and roller support (**7**) are equal to half of the total load ( V1=V7=100 KN).

By considering the summation of all forces along the OX axis equal to zero, the horizontal reaction at the pin support is zero.

The vectors of the internal forces with respect to the coordinate system XOY are:

$$\{E\}_{12} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{E\}_{21} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 86.60254 \\ 0 \end{Bmatrix} = \{E\}_{23}$$

$$\{E\}_{32} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 50 \\ 375 \end{Bmatrix} = \{E\}_{34} \qquad \{E\}_{43} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 500 \end{Bmatrix} = \{E\}_{45}$$

$$\{E\}_{54} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -50 \\ 375 \end{Bmatrix} = \{E\}_{56} \qquad \{E\}_{65} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -86.60254 \\ 125 \end{Bmatrix} = \{E\}_{67}$$

$$\{E\}_{76} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Inmulțind matricea de transformare cu vectorii eforturilor raportate la sistemul de axe XOY, rezultă vectorii eforturilor la extremitățile tronsoanelor:

By multiplying the transformation matrix by the internal forces' vectors with respect to the coordinate sytem XOY, the internal forces' vectors at the end of the elements are obtained:

$$\{e\}_{12} = \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{e\}_{21} = \begin{Bmatrix} -75.00040 \\ 43.30127 \\ 125.0000 \end{Bmatrix} = \{e\}_{23}$$

$$\{e\}_{32} = \begin{Bmatrix} -25.00000 \\ 43.30150 \\ 325.0000 \end{Bmatrix} = \{e\}_{34} \qquad \{e\}_{43} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 500.00000 \end{Bmatrix} = \{e\}_{45}$$

$$\{e\}_{54} = \begin{Bmatrix} -25.00000 \\ -43.30150 \\ 375.0000 \end{Bmatrix} = \{e\}_{56} \qquad \{e\}_{65} = \begin{Bmatrix} -75.00040 \\ -43.30150 \\ 125.0000 \end{Bmatrix} = \{e\}_{67}$$

$$\{e\}_{76} = \begin{Bmatrix} -100 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

In fig.2.62 sunt prezentate diagramele de eforturi pentru bara curbă din fig.2.61.

Fig.2.62 shows the internal forces' diagrams for the curved bar in fig. 2.61.

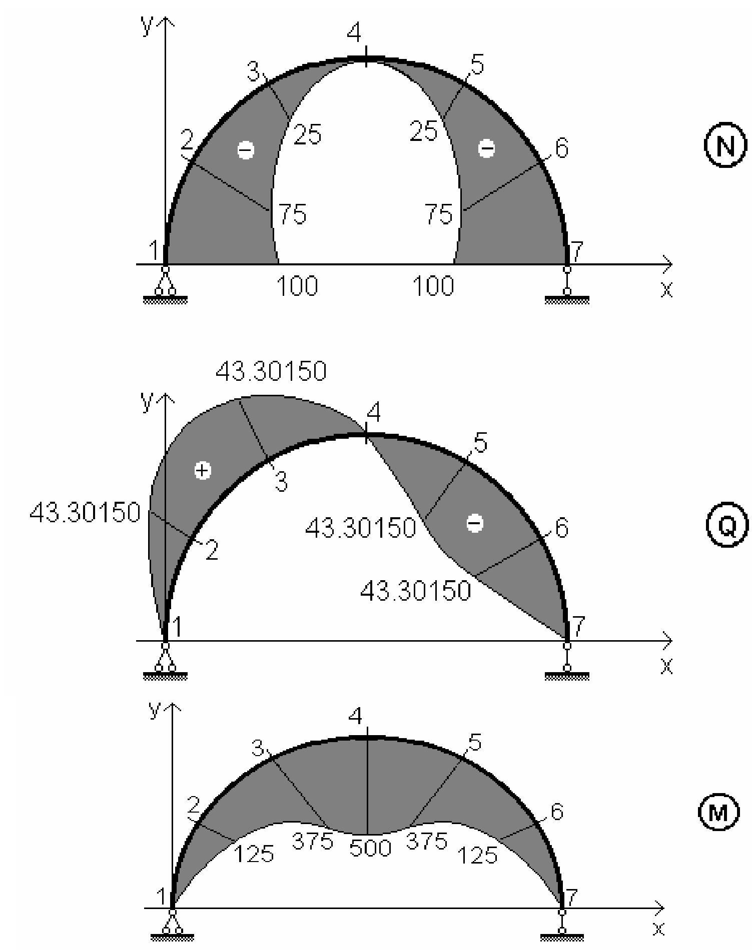



**Fig.2.62**

**Eforturile barei curbe din fig.2.61.** **Internal forces in the curved bar in fig.2.61.**

**E 2.14** ✐

De **remarcat** că:

- dacă o structură simetrică este încărcată cu o sarcină simetrică, diagramele de forță axială şi moment încovoietor sunt, de asemenea, simetrice iar diagrama de forță tăietoare este antisimetrică;
- dacă o structură simetrică este încărcată cu o sarcină antisimetrică, diagramele de forță axială şi moment încovoietor sunt antisimetrice iar diagrama de forță tăietoare este simetrică.

Barele curbe utilizate frecvent în construcții sunt **arcele**.

Arcele sunt structuri formate din una sau mai multe bare curbe, încărcate în planul lor şi în reazemele cărora există componente orizontale ale reacțiunilor (împingeri), chiar în cazul când încărcările sunt verticale.

Terminologia specifică pentru arce este următoarea:

- **naşterile** - extremitățile arcului în punctele de legătură la teren;
- **linia naşterilor** - linia care leagă cele două naşteri;
- **deschiderea arcului (L)** - distanța dintre cele două naşteri;
- **cheia arcului** - secțiunea cea mai depărtată de linia naşterilor;
- **săgeata arcului (f)** - distanța dintre cheie şi linia naşterilor;
- **intrados-extrados** - fața interioară şi respectiv fața exterioară a arcului;

To be **noticed** that:

- if a symmetric structure is subjected to a symmetric load, the axial force and bending moment diagrams are also symmetric and the shear force diamgram is antisymmetric;
- if a symmetric structure is subjected to an antisymmetric load, the axial force and bending moment diagrams are antisymmetric and the shear force diamgram is symmetric.

The curved bars frequently used in civil engineering are the **arcs**.

Arcs are structures formed by one or more curved bars, loaded in their plane and which have horizontal components of the reactions at their supports (thrusts) even in the case of vertical loads.

The specific terminology for arcs is as follows:

- **springings** - the ends of the arc at the points connected to the ground;
- **line of springings** - line which connects the two springings;
- **span of the arch (L)** - the distance between the two springings;
- **crown of the arch** - the highest section above the line of springings;
- **rise of the arch (f)** - the distance between crown and line of springings;
- **intrados-extrados** - the inner (soffit) and outer side of the arc;

- **pleoştirea arcului** - raportul f/L ; după valoarea acestui raport există arce cu săgeată mică ( $f/L \le 1/5$) şi arce cu săgeată mare ($f/L > 1/5$);

- **coeficientul de sveltețe** - raportul **L/f.**

De obicei, arcele utilizate în construcții civile, industriale şi pentru poduri au axa parabolică.

Se consideră bara curbă din fig.2.63 care poate fi descrisă explicit prin polinomul:

- **flattening of the arch** - ratio **f/L**; depending on the value of this ratio, there are arcs with small flattening ($f/L \le 1/5$) and arcs with large flattening ( ($f/L > 1/5$);

- **slenderness coefficient** - ratio **L/f**.

Usually, the arches used in civil and industrial buildings and bridges have a parabolic axis.

Consider the curved bar shown in fig.2.63, explicitly described by the polynomial:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \qquad \textbf{(2.11)}$$

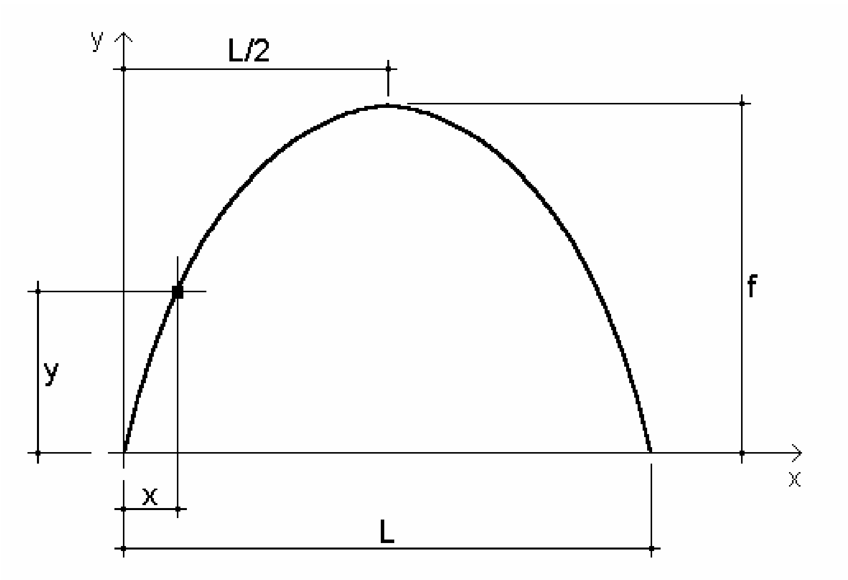



**Fig.2.63**

**Caracteristicile unei curbe parabolice după ecuația (2.13).**

**Characteristics of a curved bar using equation (2.13).**

Dacă se pun condițiile:

If the following conditions are imposed:

$$\begin{aligned} x &= 0 \quad , \; y = 0 \;\Rightarrow\; c = 0 \\ x &= L \quad , \; y = 0 \;\Rightarrow\; a \cdot L^2 + b \cdot L = 0 \\ x &= \frac{L}{2} \quad , \; y = f \;\Rightarrow\; a \cdot \frac{L^2}{4} + b \cdot \frac{L}{2} = 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(2.12)}$$

şi se introduc rezultatele în relația (2.11), se obține ecuația parabolei:

and the results are substituted into the relationship (2.11), the equation of a parabola is obtained:

$$y = \frac{4f}{L^2} \cdot x \cdot (L - x) \qquad \textbf{(2.13)}$$

Unghiul $\varphi_i$ în secțiunea $x_i$ se calculează derivând expresia (2.13):

The angle $\varphi_i$ at section $x_i$ is calculated by differentiating the relationship (2.13):

$$\varphi_i = \operatorname{arctg}(y'(x_i))$$
$$\varphi_i = \operatorname{arctg}\left(4f \cdot \frac{L - 2x_i}{L^2}\right) \qquad \textbf{(2.14)}$$

**Exemplu / Example 2.15**

Să se determine starea de eforturi pentru arcul parabolic simplu rezemat din fig.2.64.

Determine the internal forces in the simply supported parabolic arc shown in fig.2.64.

Arcul este împărțit în bolțari având pasul după abscisă de 2m, rezultând notațiile prezentate în fig.2.64.

The arch is divided in vousoirs whose projections along the abscissa is 2m, obtaining the notations shown in fig. 2.64.

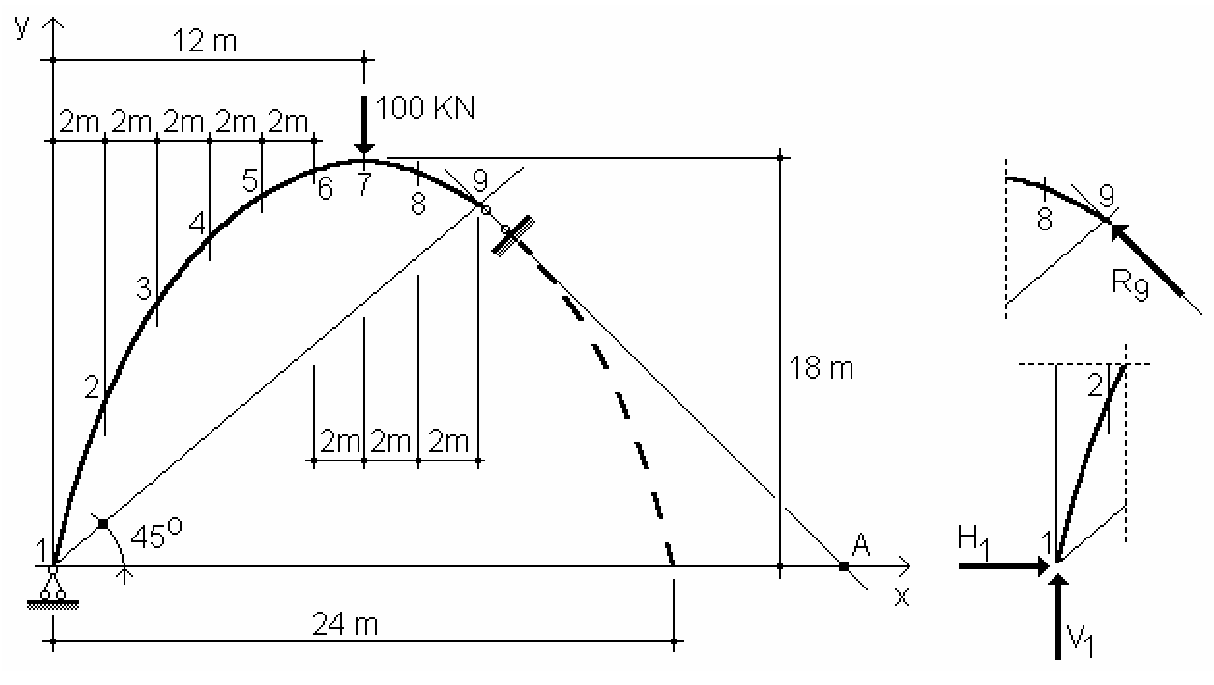



**Fig.2.64**

**Arc parabolic simplu rezemat.**

**Simply supported parabolic arch.**

**a.** calculul reacțiunilor:

**a.** calculation of the reactions:

$$\sum M_1 = 0 \qquad \frac{R_9 \cdot 16}{\cos 45} - 100 \cdot 12 = 0$$

$R_9 = 53.03301\,KN$

$\sum M_A = 0 \qquad -V_1 \cdot 16 \cdot 2 + 100 \cdot (16 \cdot 2 - 12) = 0$

$V_1 = 62.50000\,KN$

$\sum F_x = 0 \qquad H_1 - R_9 \cdot \cos 45^o = 0$

$H_1 = 37.50000\,KN$

**b.** verificarea reacțiunilor:

**b.** verification of the reactions:

$\sum F_y = 0\ :\ R_9 \cdot \cos 45^o + V_1 - 100 = 0$ **(!)**

Se notează:

One denotes:

$$q = \frac{4 \cdot f}{L^2} = \frac{4 \cdot 18}{24^2} = 0.12500$$

şi rezultă caracteristicile secțiunilor considerate :

obtaining the characteristics of the considered sections:

$x_1 = 0$

$y_1 = 0.12500 \cdot 0 \cdot (24 - 0) = 0$

$y_1' = 0.12500 \cdot (24 - 2 \cdot 0) = 3.00000$

$\omega_1 = \text{arctg}\,(3.00000) = 71.56505$

$\cos \omega_1 = 0.94868$

$x_2 = 2$

$y_2 = 0.12500 \cdot 2 \cdot (24 - 2) = 5.50000$

$y_2' = 0.12500 \cdot (24 - 2 \cdot 2) = 2.50000$

$\omega_2 = \text{arctg}\,(2.50000) = 68.19859$

$\cos \omega_2 = 0.92848$

$x_3 = 4$

$y_3 = 0.12500 \cdot 4 \cdot (24 - 4) = 10.00000$

$y_3' = 0.12500 \cdot (24 - 2 \cdot 4) = 2.00000$

$\omega_3 = \text{arctg}\,(2.00000) = 63.43495$

$\cos \omega_3 = 0.89443$

$x_4 = 6$

$y_4 = 0.12500 \cdot 6 \cdot (24 - 6) = 13.50000$

$y_4' = 0.12500 \cdot (24 - 2 \cdot 6) = 1.50000$

$\omega_4 = \text{arctg}\,(1.50000) = 56.30993$

$\cos \omega_4 = 0.83205$

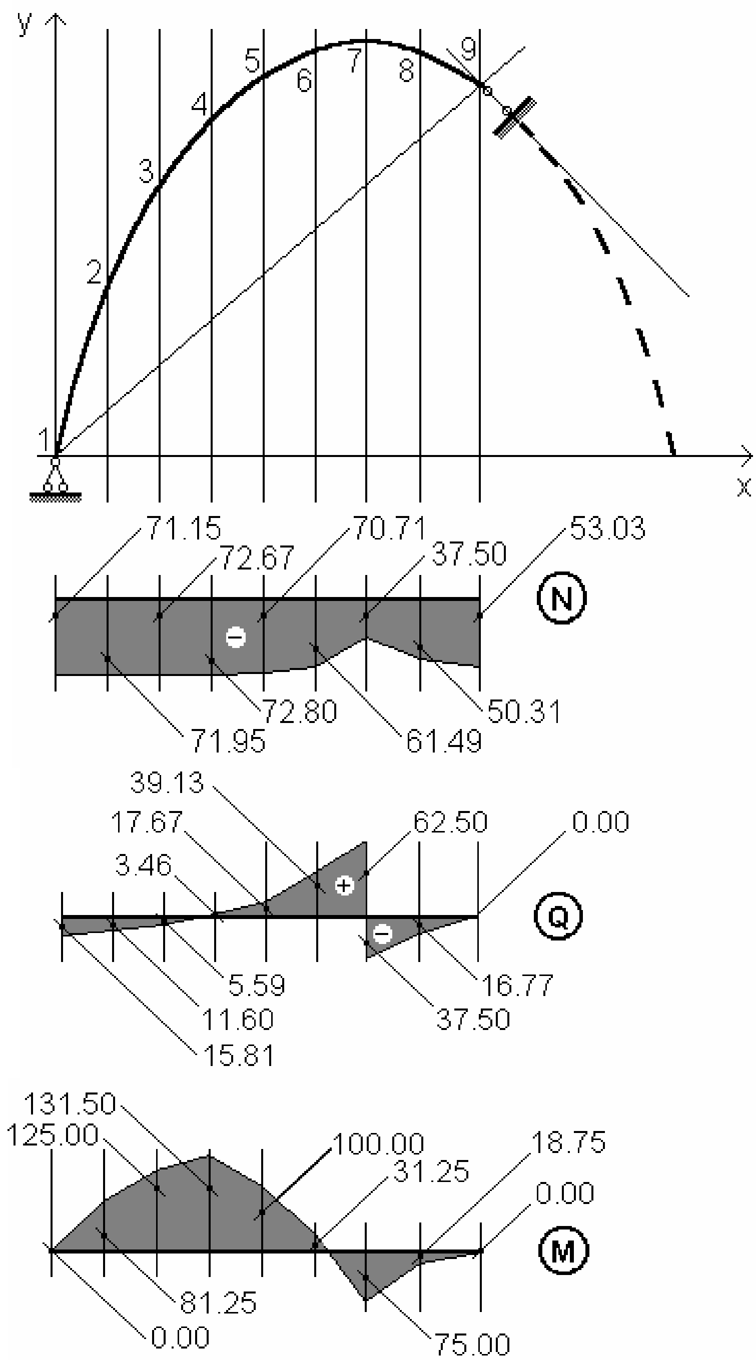



**Fig.2.65**

**Eforturile în arcul parabolic simplu rezemat din fig.2.64.**

**Internal forces in the simply supported parabolic arch in fig.2.64.**

$x_5 = 8$ $\quad$ $y_5 = 0.12500 \cdot 8 \cdot (24 - 8) = 16.00000$

$y'_5 = 0.12500 \cdot (24 - 2 \cdot 8) = 1.00000$

$\omega_5 = \text{arctg}\,(1.00000) = 45.00000$

$\cos\omega_5 = 0.70711$

$x_6 = 10$ $\quad y_6 = 0.12500 \cdot 10 \cdot (24 - 10) = 17.50000$

$y'_6 = 0.12500 \cdot (24 - 2 \cdot 10) = 0.50000$

$\omega_6 = \text{arctg}\,(0.50000) = 26.56505$

$\cos\omega_6 = 0.44721$

$x_7 = 12$ $\quad y_7 = 0.12500 \cdot 12 \cdot (24 - 12) = 18.00000$

$y'_7 = 0.12500 \cdot (24 - 2 \cdot 12) = 0.00000$

$\omega_7 = \text{arctg}\,(0.00000) = 0.00000$

$\cos\omega_7 = 0.00000$

$x_8 = 14$ $\quad y_8 = 0.12500 \cdot 14 \cdot (24 - 14) = 17.50000$

$y'_8 = 0.12500 \cdot (24 - 2 \cdot 14) = -0.50000$

$\omega_8 = \text{arctg}\,(-0.50000) = -26.56505$

$\cos\omega_8 = -0.44721$

$x_9 = 16$ $\quad y_9 = 0.12500 \cdot 16 \cdot (24 - 16) = 16.00000$

$y'_9 = 0.12500 \cdot (24 - 2 \cdot 16) = -1.00000$

$\omega_9 = \text{arctg}\,(-1.00000) = -45.00000$

$\cos\omega_9 = -0.70711$

In fig.2.65 sunt prezentate diagramele de eforturi în raport cu o axă orizontală pentru arcul din fig.2.64.

Fig.2.65 shows the internal forces' diagrams of the arch in fig. 2.64 with respect to a horizontal axis.

**E 2.15** ✍

**Exemplu / Example 2.16**

Să se determine starea de eforturi pentru arcul parabolic cu trei articulații din fig.2.66.

Determine the internal forces in the three pinned parabolic arch shown in fig.2.66.

Calculul reacțiunilor:

Calculation of the reactions:

$\sum M_1 = 0$ $\quad V_{31} \cdot 30 - 1000 \cdot 10 - 10 \cdot 15 \cdot 22.5 = 0$

$V_{31} = 445.83333\ \text{KN}$

$\sum M_{31} = 0$ $\quad -V_{31} \cdot 30 + 1000 \cdot 20 + 10 \cdot 15 \cdot 7.5 = 0$

$V_1 = 704.16667\ \text{KN}$

$\sum M_{16\text{-}1} = 0$ $\quad -704.16667 \cdot 15 + H_1 \cdot 5 + 1000 \cdot 5 = 0$

$$H_1 = 1112.50000\ KN$$

$\Sigma M_{16\text{-}31} = 0$

$$445.83333 \cdot 15 + H_{31} \cdot 5 - 10 \cdot 15 \cdot 7.5 = 0$$
$$H_{31} = -1112.50000\ KN$$

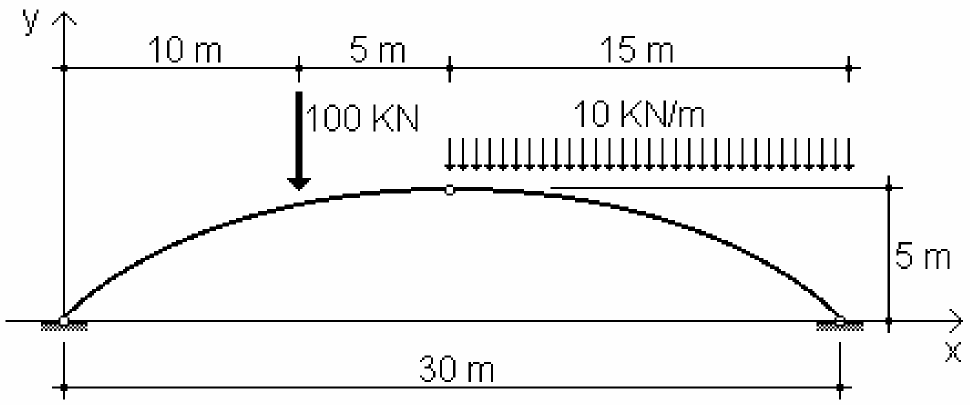



**Fig.2.66**

**Arc parabolic cu trei articulații.** **Three pinned parabolic arch.**

Arcul este simetric, fiind împărțit în 30 de bolțari egali cu 1 m. In tabelul 2.1 sunt prezentate caracteristicile secțiunilor considerate pentru o jumătate din arc.

The arch is symmetrical, being devided in 30 voussoirs of 1 m length. The characteristics of the considered sections are presented in Table 2.1 for half of the arch.

**Table.2.1.**

| No. | x | y | y' | ω | sin ω | cos ω |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 0.000 | 0.666 | 33.690 | 0.554 | 0.832 |
| **2** | 1 | 0.644 | 0.622 | 31.690 | 0.528 | 0.849 |
| **3** | 2 | 1.244 | 0.577 | 30.018 | 0.500 | 0.865 |
| **4** | 3 | 1.800 | 0.533 | 28.072 | 0.470 | 0.882 |
| **5** | 4 | 2.311 | 0.488 | 26.053 | 0.439 | 0.898 |
| **6** | 5 | 2.777 | 0.444 | 23.962 | 0.406 | 0.913 |
| **7** | 6 | 3.199 | 0.399 | 21.801 | 0.371 | 0.928 |
| **8** | 7 | 3.577 | 0.355 | 19.573 | 0.335 | 0.942 |
| **9** | 8 | 3.911 | 0.311 | 17.281 | 0.297 | 0.954 |
| **10** | 9 | 4.199 | 0.266 | 14.931 | 0.257 | 0.966 |
| **11** | 10 | 4.444 | 0.222 | 12.528 | 0.216 | 0.976 |
| **12** | 11 | 4.644 | 0.177 | 10.080 | 0.175 | 0.984 |
| **13** | 12 | 4.799 | 0.133 | 7.594 | 0.132 | 0.991 |
| **14** | 13 | 4.912 | 0.088 | 5.079 | 0.088 | 0.996 |
| **15** | 14 | 4.977 | 0.044 | 2.544 | 0.044 | 0.999 |
| **16** | 15 | 5.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 1.000 |

Efortul normal **Nx** este constant în toate secțiunile arcului iar valoarea sa este:

The axial force **Nx** is constant at all the sections of the arch and is equal to:

$$N_x = -1112.50000\,\text{KN}$$

In tabelul 2.2 sunt date eforturile N, Q, M calculate în raport cu sistemul de axe XOY şi valorile eforturilor Qx, Mx la extremitățile bolțarilor.

Table 2.2. shows the values of the internal forces N, Q, M calculated with respect to the coordinate system XOY and the internal forces Qx, Mx at the ends of the voussoirs.

Diagramele de eforturi sunt prezentate în fig.2.67.

The internal forces' diagrams are shown in fig.2.67.

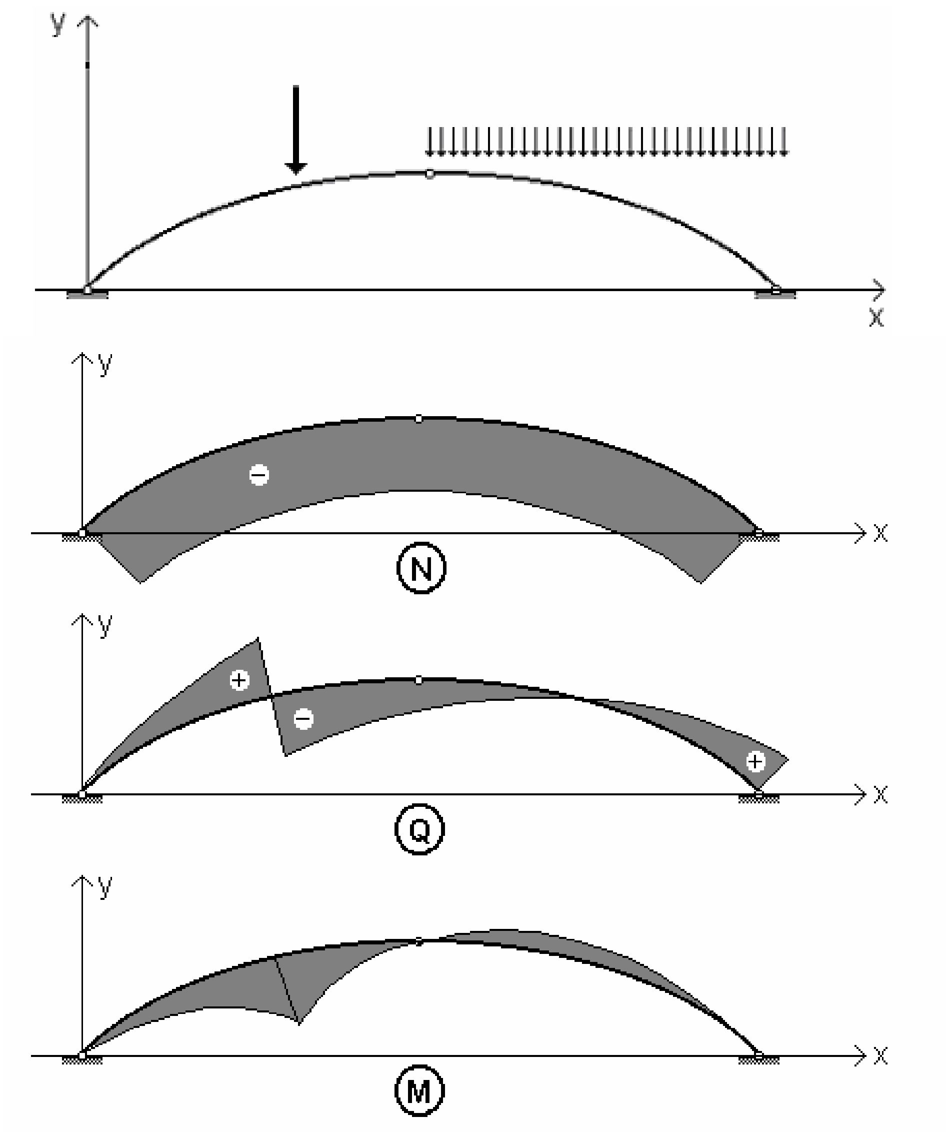



**Fig.2.67**

**Eforturile în arcul cu trei articulații din fig.2.66.**

**Internal forces in the three pinned arch in fig.2.66.**

**Table.2.2.**

| No. | Qy | Mz | N | Q | M |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 704.166 | 0.000 | -1316.258 | -31.202 | 0.000 |
| **2** | 704.166 | 704.166 | -1316.588 | 10.144 | -12.778 |
| **3** | 704.166 | 1408.333 | -1315.554 | 53.154 | 23.888 |
| **4** | 704.166 | 2112.500 | -1312.991 | 97.794 | 110.000 |
| **5** | 704.166 | 2816.666 | -1308.730 | 143.990 | 245.555 |
| **6** | 704.166 | 3520.833 | -1302.605 | 191.646 | 430.555 |
| **7** | 704.166 | 4225.000 | -1294.452 | 240.630 | 665.000 |
| **8** | 704.166 | 4929.166 | -1284.117 | 290.777 | 948.888 |
| **9** | 704.166 | 5633.333 | -1271.463 | 341.891 | 1282.222 |
| **10** | 704.166 | 6337.499 | -1256.374 | 393.740 | 1664.999 |
| **11** | -295.833 | 7041.666 | -1021.833 | 530.124 | 2097.222 |
| **12** | -295.833 | 6745.833 | -1043.546 | -485.992 | 1578.888 |
| **13** | -295.833 | 6450.000 | -1063.643 | -440.271 | 1110.000 |
| **14** | -295.833 | 6154.166 | -1081.938 | -393.173 | 690.555 |
| **15** | -295.833 | 5858.333 | -1098.268 | -344.938 | 320.555 |
| **16** | -295.833 | 5562.499 | -1112.500 | -295.834 | 0.000 |
| **17** | -305.833 | 5261.666 | -1124.983 | -256.137 | -275.112 |
| **18** | -315.833 | 4950.833 | -1136.095 | -216.893 | -518.778 |
| **19** | -325.833 | 4629.999 | -1145.805 | -175.944 | -710.001 |
| **20** | -335.833 | 4299.166 | -1154.108 | -135.925 | -867.778 |
| **21** | -345.833 | 3958.283 | -1161.030 | -96.263 | -986.112 |
| **22** | -355.833 | 3607.487 | -1166.622 | -57.169 | -1065.001 |
| **23** | -365.833 | 3246.653 | -1170.956 | -18.833 | -1104.445 |
| **24** | -375.833 | 2875.746 | -1174.122 | 18.582 | -1104.445 |
| **25** | -385.833 | 2494.988 | -1176.226 | 54.934 | -1065.000 |
| **26** | -395.833 | 2104.157 | -1177.379 | 90.111 | -986.112 |
| **27** | -405.833 | 1703.331 | -1177.699 | 124.026 | -867.778 |
| **28** | -415.833 | 1292.499 | -1177.304 | 156.617 | -710.001 |
| **29** | -425.833 | 871.661 | -1176.310 | 187.844 | -512.778 |
| **30** | -435.833 | 440.827 | -1174.828 | 217.688 | -276.112 |
| **31** | 445.833 | 0.000 | -1172.960 | 246.148 | 0.00 |

**E 2.16** ✍

**In cazul particular în care forțele sunt verticale, fig.2.68.a, considerând pentru comparație grinda simplu rezemată din fig.2.68.b, se deduc relațiile următoare pentru:**

**In the particular case when the loads are vertical, fig.2.68.a, compared to the simply supported beam in fig.2.68.b, the following relationships are obtained for:**

**i. reacțiuni:**

**i. reactions:**

$$V_A = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot b_k}{L} = V_A^0 \tag{2.15}$$

$$V_B = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot a_k}{L} = V_B^0 \tag{2.16}$$

$$H_A = H_B = H = \frac{V_A \cdot \frac{L}{2} - \sum_{A}^{C} F_k \cdot d_k}{f} = \frac{M_C^0}{f} \tag{2.17}$$

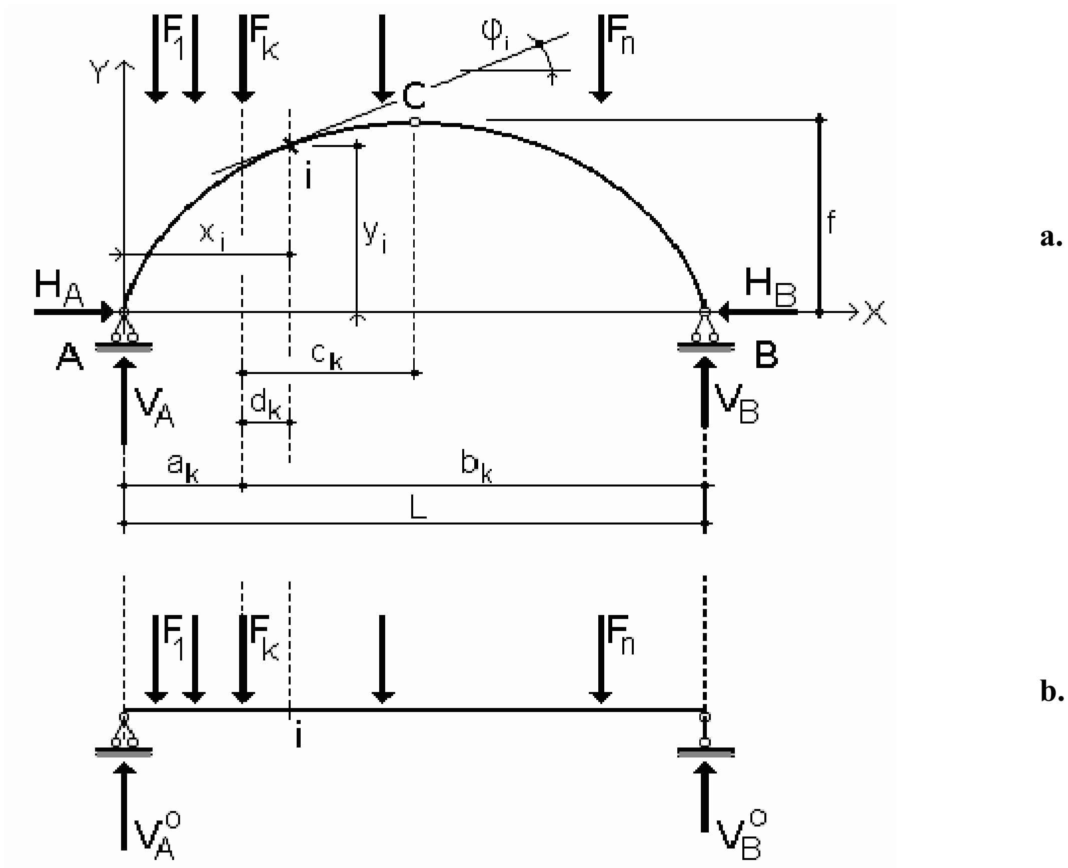



**Fig.2.68**

**Arc cu trei articulații (a) și grinda simplu rezemată (b).**

**Three pinned arch (a) and simply supported beam (b).**

Cu indicele "zero" s-au notat reacţiunile şi eforturile de la grinda simplu rezemată.

The reactions and the internal forces for the simply supported beam are denoted by the index "zero".

**ii. eforturi:**

**ii. internal forces:**

$$N_i = -(V_A - \sum_A^i F_k) \cdot \sin \varphi_i - H_A \cdot \cos \varphi_i \tag{2.18}$$

$$Q_i = (V_A - \sum_A^i F_k) \cdot \cos \varphi_i - H_A \cdot \sin \varphi_i \tag{2.19}$$

$$M_i = V_A \cdot x_i - \sum_A^i F_k \cdot d_k - H_A \cdot y_i \tag{2.20}$$

$$N_i = -Q_i^o \cdot \sin \varphi_i - H \cdot \cos \varphi_i \tag{2.21}$$

$$Q_i = Q_i^o \cdot \cos \varphi_i - H \cdot \sin \varphi_i \tag{2.22}$$

$$M_i = M_i^o - H \cdot y_i \tag{2.23}$$

$$Q_i^o = V_A^o - \sum_A^i F_k \tag{2.24}$$

$$M_i^o = V_A^o \cdot x_i - \sum_A^i F_k \cdot d_k \tag{2.25}$$

**In acest caz se observă că:**

**i.** reacţiunile verticale sunt aceleaşi;

**ii.** în reazemele arcului apar împingeri;

**iii.** în arc apare ca efort suplimentar efortul normal, care este întotdeauna de compresiune - vezi relaţiile (2.18) şi (2.21);

**iv**. forţa tăietore şi momentul încovoietor în arc sunt mai mici - vezi relaţia (2.22) şi (2.23).

In fig.2.69 este reprezentată diagrama de moment încovoietor într-un arc în raport cu grinda simplu rezemată.

**In this case, it is noticed that:**

**i.** the vertical reactions are the same;

**ii.** thrusts are produced at the supports of the arch;

**iii.** the axial force is produced in the arch as additional force, which is always a compression force - see relationships (2.18) and (2.21);

**iv.** the shear forces and the bending moments in the arch are smaller - see relationships (2.22 ) and (2.23).

Fig.2.69 shows the bending moment diagram in an arch with respect to a simply supported beam.

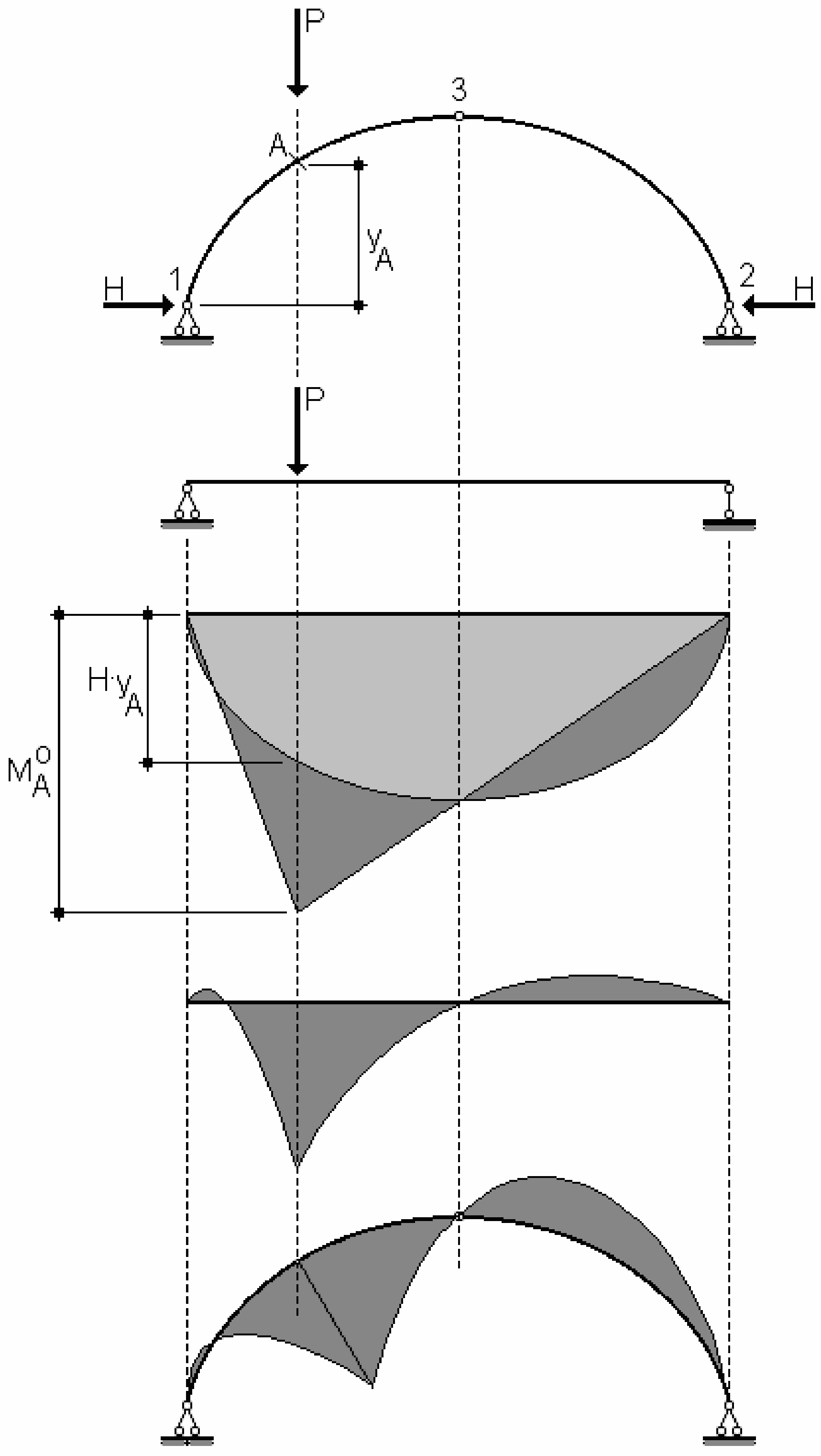



**Fig.2.69**

**Momentul încovoietor într-un arc în raport cu grinda simplu rezemată.**
a. - suprapunerea diagramelor,
b. şi c. - diagrama raportată la o dreaptă şi la arc

**Bending moment in an arch with respect to the simply supported beam**
a. - superposition of diagrams
b. and c. - diagram with respect to a straight line and the arch

## 2.5 STRUCTURI CU ZABRELE

Structurile cu zăbrele sunt structuri din bare articulate în noduri care, prin schematizare, rămân geometric indeformabile.

Structurile cu zăbrele pot fi considerate ca structuri la care inima plină este înlocuită printr-un sistem de bare triangulare care leagă tălpile.

O structură cu zăbrele se numeşte cu înălţime constantă sau cu înălţime variabilă, după cum tălpile sunt sau nu paralele. Tălpile pot fi rectilinii, curbilinii sau poligonale dar zăbrelele (diagonalele şi montanţii) sunt totdeauna rectilinii.

Structurile cu zăbrele pot fi clasificate în:

**i.** structuri simple,

**ii.** structuri complexe,

**iii.** structuri compuse.

Sistemele de triangulaţie ale **structurilor cu zăbrele simple** sunt următoarele:

- sistemul Warren, în V, unde diagonalele succesive sunt simetric înclinate în raport cu verticala, fiind în consecinţă alternativ comprimate şi întinse, fig.2.70;
- sistemul Pratt, în N, unde barele sunt alternativ verticale şi înclinate, astfel încât montanţii sunt comprimaţi, fig.2.71;
- sistemul Howe, în N invers, analog cu sistemul Pratt, dar la care montanţii sunt întinşi, fig.2.72;

## 2.5 TRUSSES

Trusses are structures composed of bars pinned at joints which, by virtue of their structural form, remain geometrically undeformable.

Trusses can be considered as structures at which the solid web is replaced by a system of triangular bars which connect the chords.

A truss has a constant or variable height if the chords are parallel or nonparallel, respectively. The chords can be straight, curved or polygonal while the internal bracing members (verticals and diagonal bars) are always straight.

Trusses can be classified into :

**i.** simple trusses,

**ii.** complex trusses,

**iii.** compound trusses.

The triangular systems used for the **simple trusses** are the following :

- Warren system, in V, where the succesive diagonals are symmetrically inclined with respect to the vertical direction; they are consequently alternatively in compression and tension, fig.2.70;
- Pratt system, in N, having alternating vertical and inclined bars in such a way that the verticals are in compression, fig.2.71;
- Howe system, in reversed N, simmilar to the Pratt system, but in which the verticals are in tension, fig.2.72;

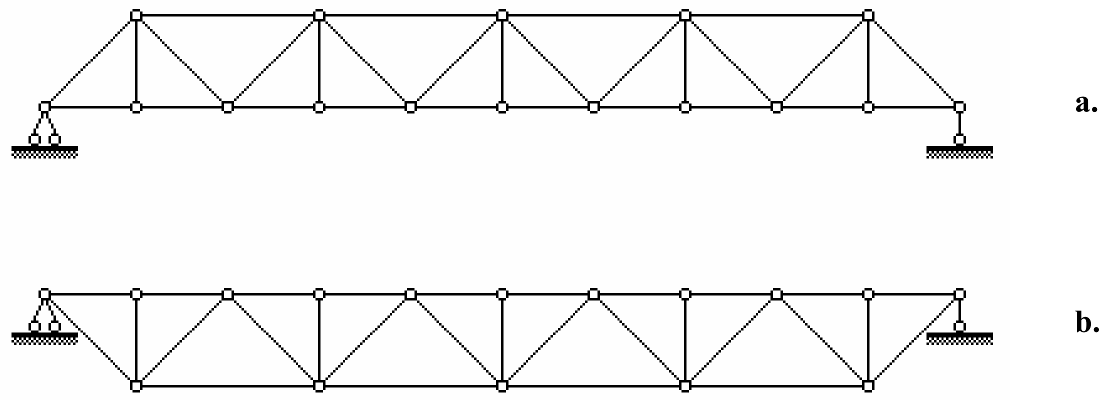



**Fig.2.70** .

**Grinzi cu zăbrele cu triangulația în V, sistem Warren.**
a. - rezemare inferioară, b. - rezemare superioară

**Trusses with triangular system in V, Warren system.**
a. - lower support, b. - upper support

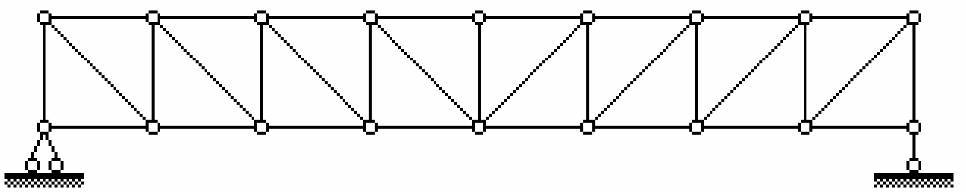


**Fig.2.71**

**Grindă cu zăbrele cu triangulația în N, sistem Pratt.**

**Truss with triangular system in N, Pratt system.**

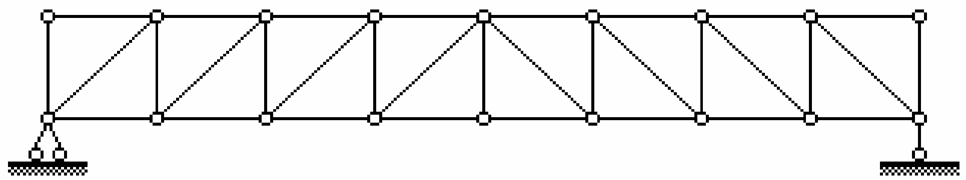


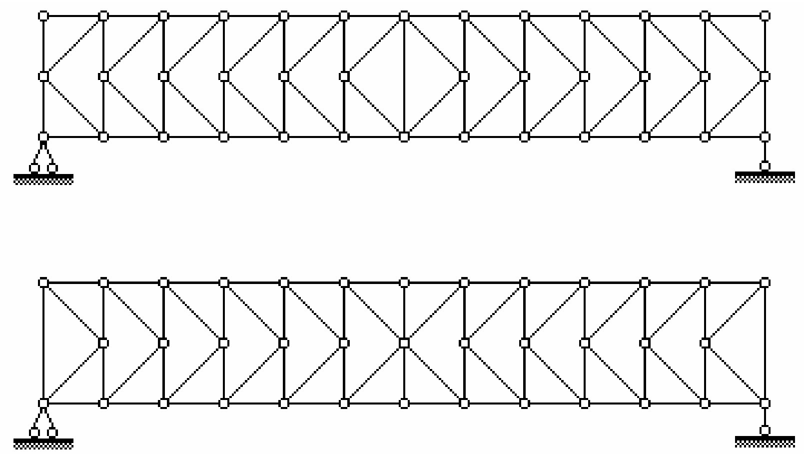
**Fig.2.72**

**Grindă cu zăbrele cu triangulația în N invers, sistem Howe.**

**Truss with triungular system in reversed N, Howe system.**

- sistem în K sau în K invers la care fiecare montant vertical întâlneşte două diagonale în mijlocul lungimii sale, fig.2.73.

- K system or reversed K system in which each vertical meets two diagonals at its middle, fig.2.73.



a.

b.

**Fig.2.73**

**Grinzi cu triangulația în K.**
a. - în K, b. - în K invers

**Truss with trinagular system in K.**
a. -  K, b. - reversed K

**Structurile compuse cu zăbrele** sunt obținute plecând de la sisteme simple, la care se crează noduri secundare ce sunt legate între ele sau legate cu nodurile principale. Aceste structuri sunt mai puțin utilizate şi numai pentru deschideri mari, fig.2.74.

**Compoud trusses** are formed by using simple trusses, in which secondary joints are created. The secondary joints are connected to each other or to the main joints. These structures are less used in practice, being met only in the case of large spans, fig.2.74.

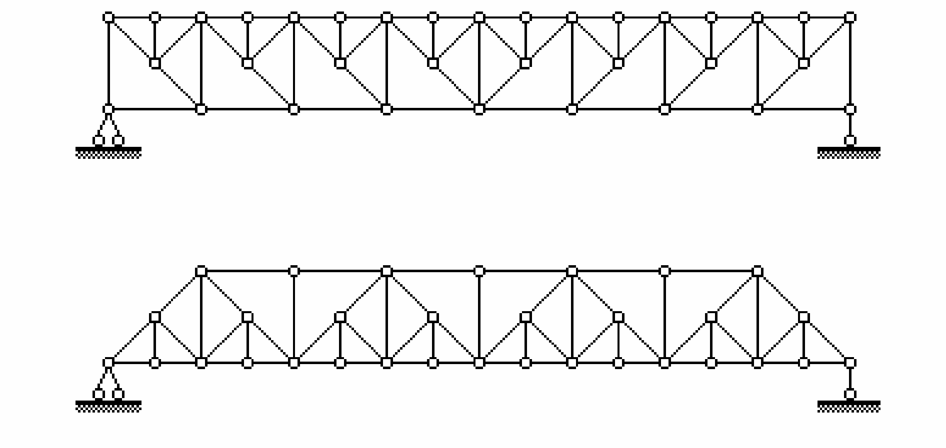


**Fig.2.74**

**Grinzi cu zăbrele compuse.**

**Compound trusses.**

**Structurile cu zăbrele complexe** sunt constituite din triangulații distincte care se petrec una peste alta dar nu au noduri comune, fig.2.75.

**Complex truses** are formed by distinct triangular systems which are passing one over the other but without having common joints , fig.2.75.

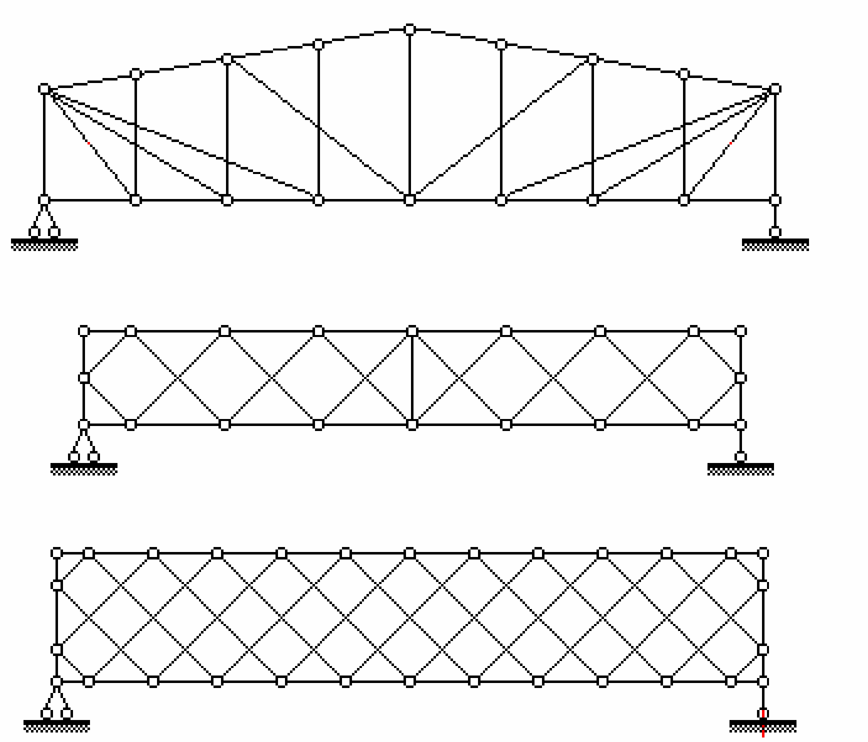


**Fig.2.75**

**Grinzi cu zăbrele complexe.** **Complex trusses.**

## 2.5.1 Principii generale

Pentru sistemele cu zăbrele static determinate, se admit următoarele ipoteze specifice:

- nodurile sunt articulații perfecte;
- forțele sunt aplicate numai în noduri;
- axele barelor în fiecare nod sunt toate concurente.

Ca o consecință a acestor ipoteze, **barele structurilor cu zăbrele sunt supuse numai la eforturi axiale de întindere sau compresiune**.

Făcând notațiile:

**b -** este numărul barelor (legături interioare);
**r -** numărul legăturilor simple exterioare;

## 2.5.1 General principles

For the statically determinate trusses, the following specific assumptions are made:

- joints are perfect pins;
- loads are applied only to the joints;
- center lines of the jointing bars are concurrent at a point.

As a result of these assumptions, **the forces in the bars of trusses are only tension or compression axial forces.**

By making the notations:

**b -** is the number of bars (internal connections);
**r -** number of simple external connections (support reactions);

**n -** numărul nodurilor.

şi ţinând seama de faptul că în plan fiecare nod trebuie fixat prin două legături, se poate scrie condiţia generală:

**n -** number of joints.

and considering that each node need to be constrained in plane by two connections, the general condition can be written:

$$(\mathbf{b} + \mathbf{r}) \geq 2 \cdot \mathbf{n} \quad \textbf{(2.26)}$$

In cazul particular al structurilor static determinate rezultă:

In the particular case of the statically determinate structures, it results in:

$$(\mathbf{b} + \mathbf{r}) - 2 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \textbf{(2.27)}$$

Relaţia (2.27) este numită **condiţia de strictă invariabilitate geometrică şi determinare statică** pentru structurile plane cu zăbrele.

The relationship (2.27) is called the **condition of strict geometrical invariability and statical determinancy** of the plane trusses.

## 2.5.2 Calculul structurilor cu zăbrele

## 2.5.2 Analysis of trusses

In acest capitol vor fi dezvoltate principiile de calcul pentru structurile simple cu zăbrele şi principiile valabile pentru alte tipuri de structuri cu zăbrele.

The analysis principles for simple trusses and other types of pin-jointed structures will be developed in this chapter.

Elementele componente ale unei structuri cu zăbrele sunt:

- tălpile (superioară şi inferioară), care pot fi paralele sau neparalele (poligonale);
- zăbrelele: diagonale (bare înclinate) şi montanţi (bare verticale sau orizontale).

The main components of trusses are:

- chords (top and bottom), which could be parallel or nonparallel (polygonale);
- internal bracing members: diagonals (inclined bars) and verticals (vertical bars).

Pentru analiza statică a structurilor cu zăbrele se utilizează relaţia (2.28):

For the static analysis of trusses, the relationship (2.28) is used:

$$\mathbf{h} = (\mathbf{b} + \mathbf{r}) - 2 \cdot \mathbf{n} \quad \textbf{(2.28)}$$

**Metodele generale** pentru calculul eforturilor în barele structurilor cu zăbrele sunt:

**The general methods** for the calculation of the axial forces in the bars of trusses are:

- **metoda izolării nodurilor,** în două variante: analitică şi grafică (epura Cremona);

- **metoda secțiunilor**, în două variante: analitică (metoda Ritter) şi grafică (metoada Culmann).

Pentru structurile cu zăbrele simple se utilizează metodele generale (metoda izolării nodurilor sau metoda secțiunilor), separat sau combinate.

Pentru calculul structurilor cu zăbrele compuse, există două moduri de rezolvare: prin combinarea celor două metode generale sau prin descompunerea structurii în sisteme simple principale şi secundare şi suprapunerea efectelor.

## 2.5.2.a Metoda izolării nodurilor - analitic

După calculul reacțiunilor, se fac secțiuni succesive în jurul nodurilor şi se scriu câte două ecuații de echilibru de proiecție pentru fiecare sistem de forțe concurente obținut (forțe exterioare şi eforturi axiale ale barelor secționate).

Condiția ca această metodă să poată fi practic aplicată este următoarea: **găsirea unei ordini de izolare a nodurilor, astfel încât în fiecare nod să fie numai două bare în care efortul axial este necunoscut**.

Echilibrul în jurul nodurilor trebuie scris cu forțele de legătură, fig.2.76.

- **method of joints**, in two versions: analytical and graphical (Cremona diagram) ;

- **method of sections**, in two versions: analytical (Ritter method) and graphical (Culman method).

For simple trusses, the general methods are used (method of joints or method of sections), either separately or combined.

For compound trusses, there are two methods of analysis: combination of the two general methods or braking down the structure in simple main and secondary systems and the superposition of the effects.

## 2.4.2.a Method of joints - analytical

After the calculation of support reactions, successive “cuts” around the joints are performed and two equations of force equilibrium are written for each system of concurrent forces obtained (external loads and axial forces in the “cut” bars) .

In order to apply this method in practice, the following condition has to be satisfied: **the sequence in which the joints are isolated is chosen in such a way that at most two unknown axial forces should be at the joint.**

The equilibrium equations of the joints are written with the unknown axial forces, fig.2.76.

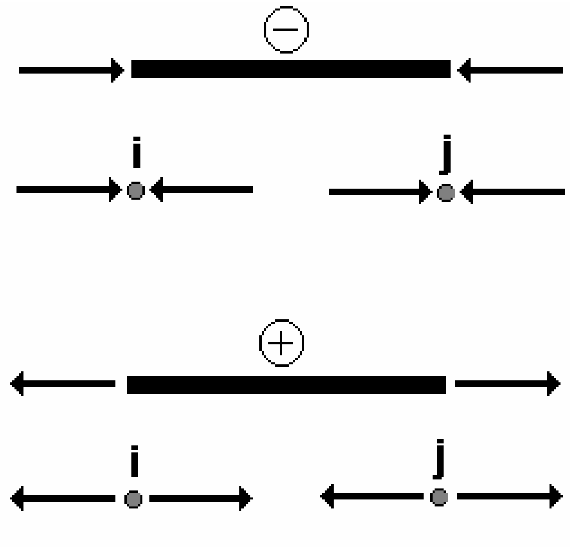



**Fig.2.76**

**Echilibrul în jurul nodului.** **Joint equilibrium.**

**Exemplu / Example 2.17**

Să se determine starea de eforturi pentru grinda cu zăbrele din fig.2.77.

Determine the axial force in the bars of the truss shown in fig.2.77.

După analiza statică ( h=(b+r)-2n=25+3-2·14=0 ) şi calculul reacţiunilor $V_1$ şi $V_2$, se face izolarea nodurilor în ordinea:

After the static analysis ( h=(b+r)-2n=25+3-2·14=0 ) and calculation of the reactions $V_1$ and $V_2$, the isolation of joints is carried out:

**a.** nod **1:** / **a.** joint **1:**

$$\sum F_x = 0: \quad N_{13} = 0$$ (bară inactivă / inactive bar)

$$\sum F_y = 0: \quad N_{12} + V_1 = 0$$

$$N_{12} = -V_1$$ (compresiune / compression)

**b.** nod **2**: / **b.** joint **2**:

$$\sum F_x = 0: \quad N_{24} + N_{23} \cdot \cos\varphi = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad -N_{23} \cdot \sin\varphi + N_{21} - F_2 = 0$$

$$N_{23} = \frac{N_{21} - F_2}{\sin\varphi}$$ (întindere deoarece / tension, because: $N_{21} = |V_1| \rangle F_2$)

$$N_{24} = -N_{23} \cdot \cos\varphi$$

$$N_{24} = -(N_{21} - F_2) \cdot ctg\varphi$$ (compresiune / compression)

**c.** nod **3**: / **c.** joint **3**:

$\sum F_x = 0: \quad N_{35} - N_{32} \cdot \cos\varphi = 0$

$\sum F_y = 0: \quad N_{34} + N_{32} \cdot \sin\varphi = 0$

$N_{35} = N_{32} \cdot \cos\varphi$ (întindere / tension)

$N_{34} = -N_{32} \cdot \sin\varphi$ (compresiune / compression)

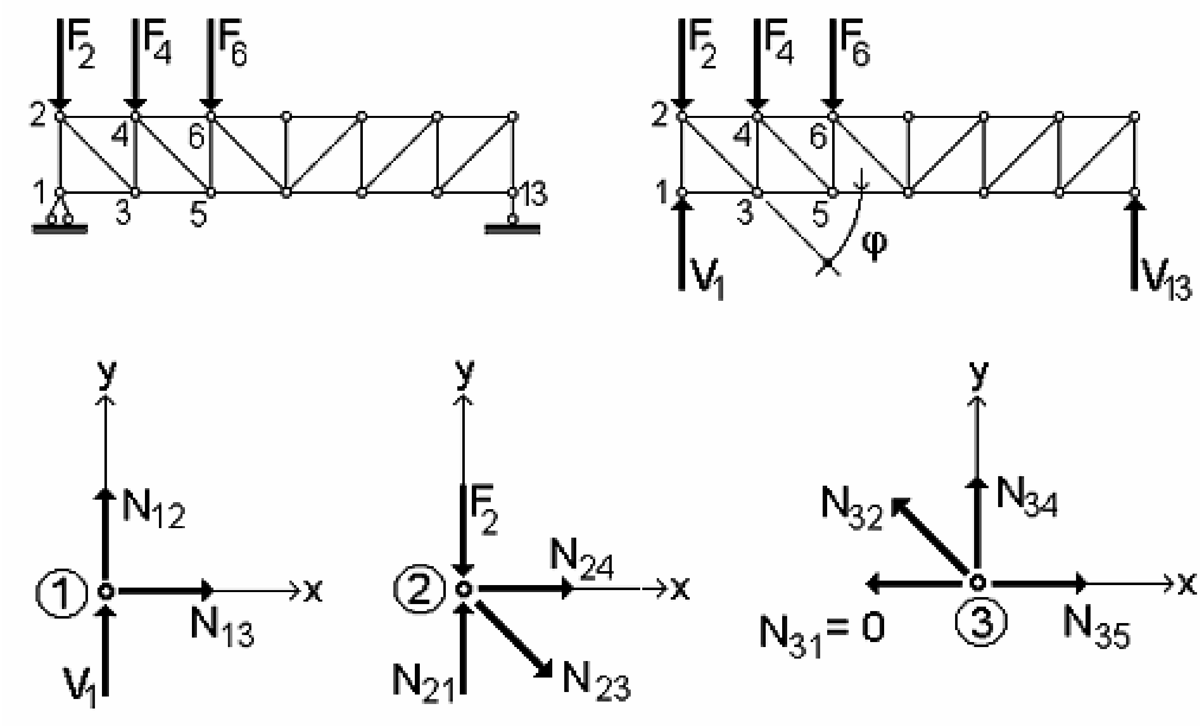



**Fig.2.77**

**Metoda izolării nodurilor.** **Method of joints.**

**E 2.17**

**Observație:**

In penultimul nod există un singur efort axial necunoscut iar în ultimul nod nu este nici un efort axial necunoscut, rezultă deci trei ecuații de verificare; **explicație:** trei ecuații de echilibru au fost utilizate pentru calculul reacțiunilor, deci rămân numai 2n-3 ecuații distincte de echilibru.

**Note:**

In the penultimate joint there is only one unknown axial force and at the last joint there is no unknown axial force, consequently it results in three equations of verification; **explanation:** three equations of equilibrium were used for the calculation of reactions, so there are remaining only 2n-3 distinct equations of equilibrium.

## 2.4.2.b Metoda izolării nodurilor - grafic (epura Cremona)

Este o construcţie grafică, prin care se realizează succesiv un poligon al forţelor închis pentru fiecare nod al structurii.

Ordinea de izolare a nodurilor este impusă de condiţia ca în fiecare din acestea trebuie să existe două bare cu efort axial necunoscut.

## 2.4.2.b Method of joints - graphical (Cremona diagram)

This is a graphical construction, by which a closed polygone of forces is successively created for each joint of the structure.

The sequence in which the joints are isolated is imposed by the condition that only two bars with unknown axial forces should exist at each joint.

**Exemplu / Example 2.18**

Să se determine starea de eforturi pentru grinda cu zăbrele din fig.2.78, utilizând metoda izolarii nodurilor, procedeul grafic.

In fig.2.78 sunt prezentate etapele succesive de izolare a fiecărui nod şi epura Cremona.

Epura Cremona este o construcţie grafică care necesită stabilirea unei scări de reprezentare a forţelor şi a unui sens de parcurgere a fiecărui nod (vezi indicaţia din fig.2.78).

Construirea epurii necesită împărţirea structurii în regiuni. Regiunile sunt delimitate de bare şi forţe (acţiuni şi reacţiuni). De obicei regiunile sunt notate cu litere, ajutând la depistarea efortului şi sensului acestuia dintr-o bară.

**Observaţie:**

In penultimul nod există un singur efort axial necunoscut iar în ultimul nod nu este nici un efort axial necunoscut, rezultă deci trei ecuaţii de verificare; **explicaţie**: trei ecuaţii de echilibru au fost utilizate pentru calculul reacţiunilor, deci rămân numai 2n-3 ecuaţii distincte de echilibru.

Determine the axial force in the bars of the truss shown in fig.2.78, by using the methods of joints, graphical method.

Fig.2.78 shows the successive steps for the isolation of each joint and the Cremona diagram.

The Cremona diagram is a graphical construction for which a scale has to be chosen in order to draw the forces and a sense in which each joint is analysed (see the instruction in fig.2.78).

The construction of the diagram requires the division of the structure into regions. The regions are delimited by bars and forces (actions and reactions). Usually these regions are denoted by letters, helping at the identification of the force and its sense in a bar).

**Note :**

In the penultimate joint there is only one unknown axial force and in the last joint there is no unknown axial force, consequently it results three equations of verification; **explanation**: three equations of equilibrium were used for the calculation of reactions, so there are remaining only 2n-3 distinct equations of equilibrium.

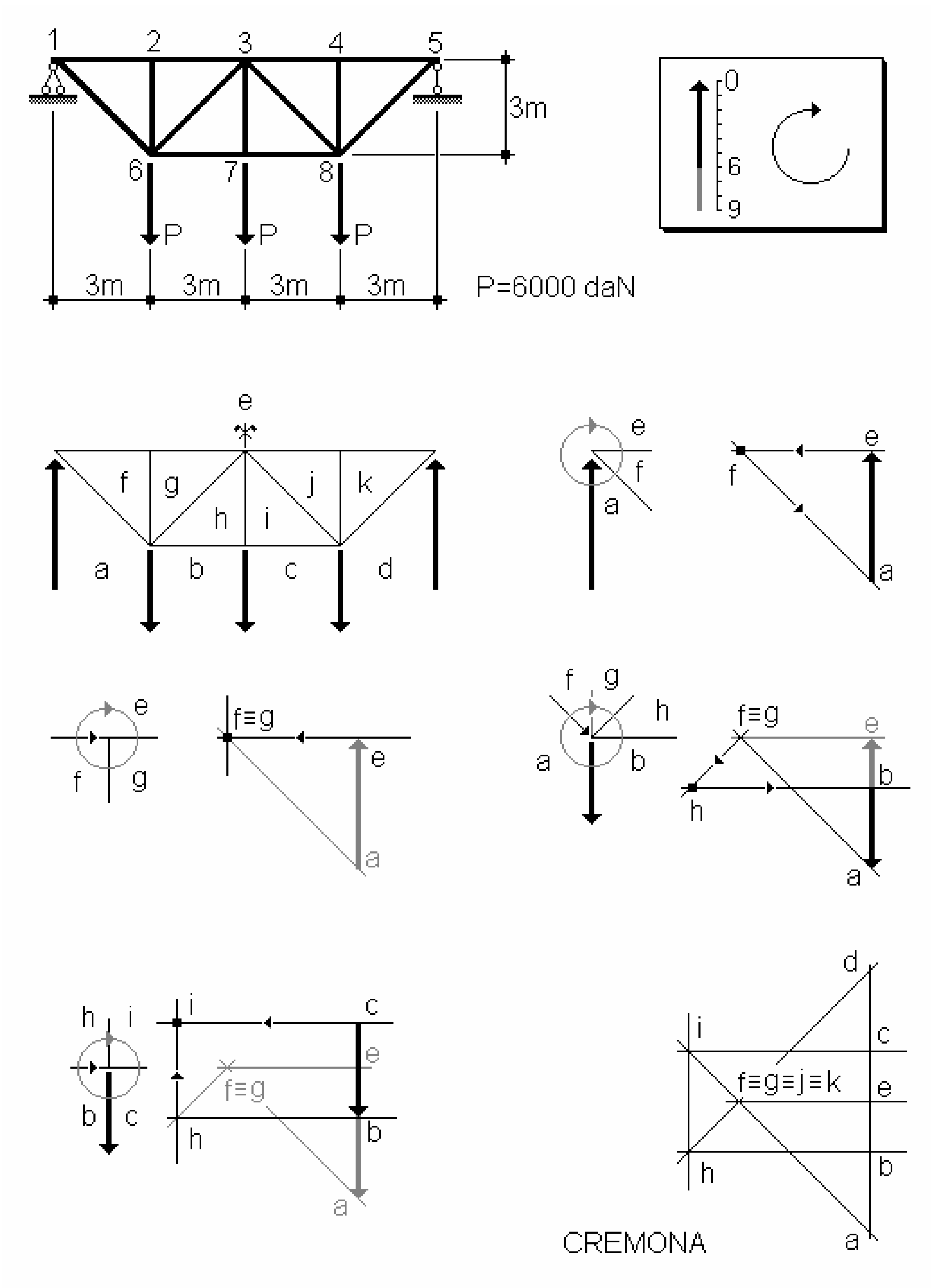



**Fig.2.78**

**Grindă cu zăbrele - epura Cremona.** **Truss - Cremona diagram.**

| **E 2.18** |
|---|

## 2.4.2.c Metoda secțiunilor - analitic (Ritter)

După calculul reacțiunilor, se fac secțiuni care traversează grinda şi apoi se scriu condițiile de echilibru pentru partea stângă sau dreaptă a fiecărei secțiuni, fig.2.79 şi 2.80.

**Observație:**

Deoarece numărul ecuațiilor distincte de echilibru pentru un corp plan este 3, numărul de bare cu efort axial necunoscut în fiecare secțiune trebuie să fie, de asemenea, maxim 3; ecuațiile de echilibru (de moment sau de proiecție) pot fi alese astfel încât în fiecare din ele să apară un singur efort axial necunoscut.

## 2.4.2.c Method of sections - analytical (Ritter)

After the calculation of reactions, sections through the truss are performed and then the equations of equilibrium are written for the left or right part of each section, fig.2.79 and 2.80.

**Note:**

Since the number of distinct equations of equilibrium for a body in plane is 3, the number of bars with unknown axial forces in each section has also to be maximum 3; the equations of equlibrium (moment or forces) can be chosen in such a way that each equation should have only one unknown axial force.

**Exemplu / Example 2.19**

Să se determine starea de eforturi pentru grinda cu zăbrele cu tălpi paralele din fig.2.79.

Determine the axial force in the bars of the truss with parallel chords shown in fig.2.79.

**a.** secțiunea **I-I**: / **a.** section **I-I**:

$$N_{35} = N_{53}\,; \qquad N_{46} = N_{64} \qquad \text{şi / et} \qquad N_{45} = N_{54}$$

Ecuațiile convenabile pentru partea stângă a secțiunii sunt:

The convenient equations of equilibrium for the left side of the section are :

$$M_4^{(1-4)} = 0: \qquad N_{35} \cdot h - V_1 \cdot a + F_2 \cdot a = 0$$

din care: / resulting in:

$$N_{35} = \frac{V_1 \cdot a - F_2 \cdot a}{h}$$

Dacă se consideră grinda cu inimă plină din fig.2.79.b, încărcată cu aceleaşi forțe ca şi grinda cu zăbrele, pentru care:

If the solid web beam shown in fig.2.79.b is considered, loaded by the same forces as the truss, for which:

$$V_1^o = V_1, \qquad V_2^o = V_{13}$$

iar diagramele de eforturi $Q^o$ şi $M^o$ sunt prezentate în fig.2.79, se poate scrie ecuaţia:

and the diagrams $Q^o$ and $M^o$ are shown in fig.2.4, the following equation can be written:

$$V_1 \cdot a - F_2 \cdot a = M_3^o = M_4^o$$

de unde resultă:

resulting in:

$$N_{35} = \frac{M_4^o}{h}$$ (întindere / tension)

Fiecare tronson care rezultă trebuie să fie în echilibru, fig.2.80.a şi b:

Each part of the truss has to be in equalibrium, fig.2.80.a and b:

$$M_5^{(1-4)} = 0 : \qquad -N_{46} \cdot h - V_1 \cdot 2a + F_2 \cdot 2a + F_4 \cdot a = 0$$

deci:

thus:

$$N_{46} = -\frac{V_1 \cdot 2a - F_2 \cdot 2a - F_4 \cdot a}{h} = -\frac{M_5^o}{h}$$ (compresiune / compression)

$$\sum F_y^{(1-4)} = 0 : \qquad -N_{45} \cdot \sin\varphi + V_1 - F_2 - F_4 = 0$$

deci:

thus:

$$N_{45} = \frac{V_1 - F_2 - F_4}{\sin\varphi} = \frac{Q_{35}^o}{\sin\varphi}$$ (întindere / tension)

$Q_{35}^0$ este forţa tăietoare în al doilea panou al grinzii cu inimă plină.

$Q_{35}^0$ is the shear force in the second panel of the solid web beam.

**b.** secţiunea **II-II:**

**b.** section **II-II:**

Pentru a calcula efortul axial în montantul 5-6 se scrie ecuaţia:

In order to calculate the axial force in the vertical 5-6, the following equation can be written:

$$\sum F_y^{(1-5)} = 0 : \qquad N_{56} + V_1 - F_2 - F_4 = 0$$

deci:

thus:

$$N_{56} = -(V_1 - F_2 - F_4) = -Q_{35}^o$$ (compresiune / compression)

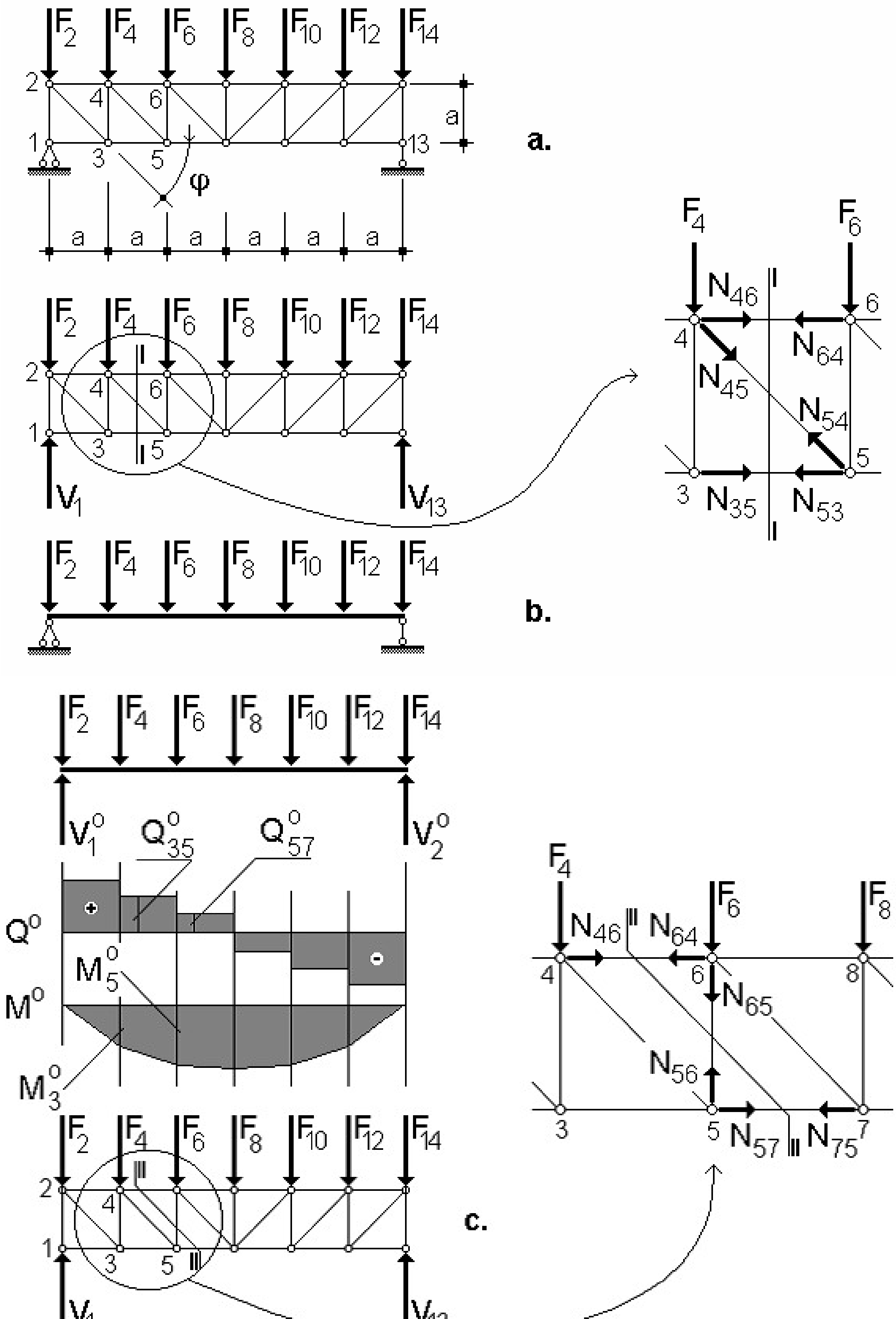



**Fig.2.79**

**Metoda secțiunilor.** **Method of sections.**

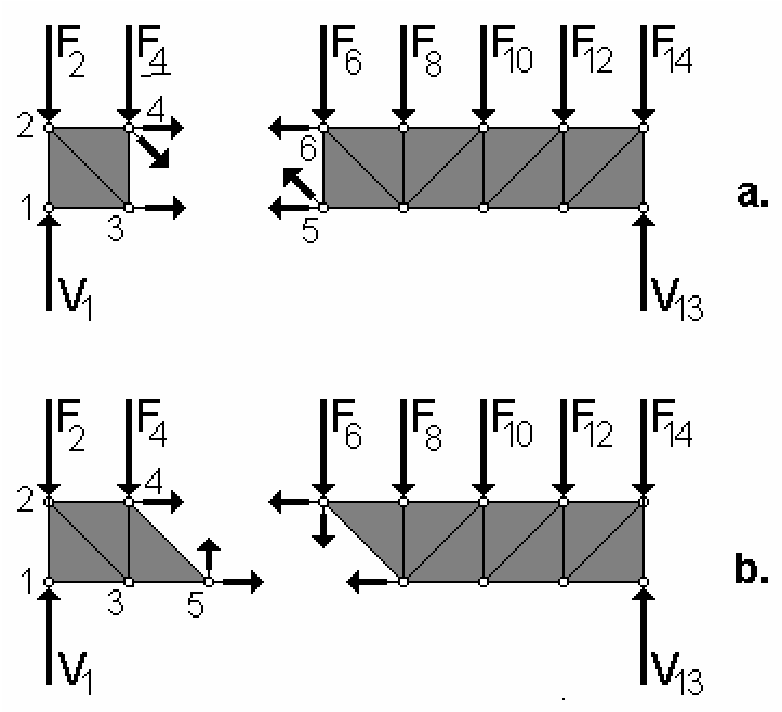



**Fig.2.80**

**Echilibru tronsoanelor.** **Equilibrium of parts.**

**E 2.19**

### 2.5.2.d Metoda secțiunilor - grafic (Culman)

**Principiul:** se descompune rezultanta tuturor forțelor din stânga sau din dreapta secțiunii pe cele trei direcții ale barelor secționate, componentele obținute cu semn schimbat reprezentând eforturile axiale în bare.

### 2.5.2.d Method of sections - graphical (Culmann)

**Principle:** the resultant of all the forces at the left or right of the section is resolved in the three directions of the sectioned bars, the components obtained, with opposite sign, represent the axial forces in the bars.

## 2.5.3. Calculul structurilor cu zăbrele compuse

Pentru calculul structurilor cu zăbrele compuse există două metode:

**a.** combinarea celor două metode generale, metoda izolării nodurilor şi metoda secțiunilor, ex.2.20;

## 2.5.3. Analysis of compound trusses

There are two methods for the analysis of the compound trusses:

**a.** combination of the two general methods, method of joints and method of sections, ex.2.20;

**b.** descompunerea structurii în sisteme simple principale şi secundare, rezolvarea acestora prin metodele generale şi suprapunerea efectelor, ex.2.21.

**b.** braking down the structure in simple main and secondary systems and their analysis using general methods and the superposition of effects, ex.2.21.

**Exemplu / Example 2.20**

Să se determine starea de eforturi pentru grinda cu zăbrele, cu tălpi paralele, din fig.2.81 - metoda izolării nodurilor şi metoda secţiunilor.

Determine the axial force in the bars of the truss with parallel chords shown in fig.2.81 - method of joints and method of sections.

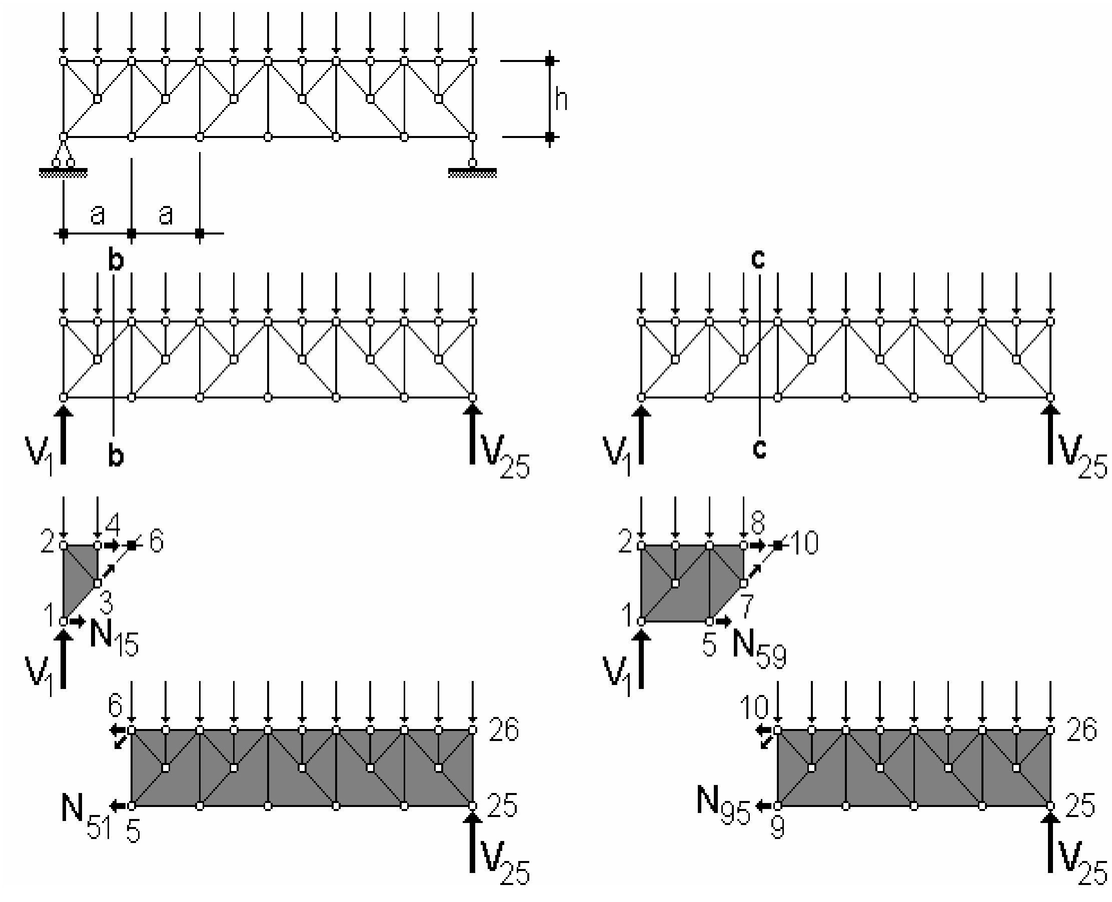



**Fig.2.81**

**Grindă cu zăbrele compusă.** **Compound truss.**

**a.** analiza statică a grinzii:

**a.** static analysis of the truss:

$$h=(b+r)-2n=(49+3)-2\cdot 26=0$$

**b.** calculul reacțiunilor : $V_1$ şi $V_2$

**b.** calculation of the reactions: $V_1$ and $V_2$

**c.** calculul eforturilor $N_{15}$ şi $N_{51}$ (secțiunea b-b):

**c.** calculation of the axial forces $N_{15}$ and $N_{51}$ (section b-b):

$$N_{15} = \frac{M_6^{(1\text{-}4)}}{h} = N_{51} = \frac{M_6^{(5\text{-}26)}}{h}$$

**d.** izolarea nodurilor în ordinea următoare:

**d.** isolation of the joints in the following sequence:

- nodul / joint **1 -** pentru a calcula / to calculate $N_{13}$, $N_{12}$
- nodul / joint **2 -** pentru a calcula / to calculate $N_{23}$, $N_{24}$
- nodul / joint **3 -** pentru a calcula / to calculate $N_{34}$, $N_{36}$
- nodul / joint **4 -** pentru a calcula / to calculate $N_{46}$

**e.** calculul eforturilor $N_{59}$ şi $N_{95}$ (secțiunea b-b):

**e.** calculation of the axial forces $N_{59}$ and $N_{95}$ (section b-b):

$$N_{59} = \frac{M_{10}^{(1-8)}}{h} = N_{95} = \frac{M_{10}^{(9-26)}}{h}$$

f. izolarea nodurilor în ordinea următoare: **5, 6, 7, 8**

f. isolation of the joints in the following sequence: **5, 6, 7, 8**

şi apoi mai departe.

and so on.

**E 2.20** ✍

**Exemplu / Example 2.21**

Să se determine starea de eforturi pentru grinda cu zăbrele cu tălpi paralele din fig.2.82, prin descompunerea structurii în sisteme simple principale şi secundare.

Determine the axial force in the bars of the truss with parallel chords shown in fig.2.82, by braking down the truss in simple main and secondary systems.

**a.** analiza statică a grinzii:

**a.** static analysis of the truss:

$$h=(b+r)-2n=(49+3)-2\cdot 26=0$$

**b.** descompunerea structurii:

**b.** decomposition of the truss:

Structura este descompusă într-un sistem principal şi mai multe sisteme secundare, simplu rezemate în nodurile sistemului principal.

The truss is broken down in a main system and more secondary systems, simply supported at the joints of the main system.

**c.** stabilirea încărcărilor:

**c.** identification of the loads:

Fiecare sistem secundar este încărcat cu o forță F care dă reacțiuni egale cu F/2. In nodurile sistemului principal acționează forțele directe F şi forțele F/2 transmise de la sistemele secundare.

Each secondary system issubjected to a force F which results in reactions equal to F/2. The joints of the main system are charged by direct forces F and forces F/2 transmitted by the secondary systems.

**d.** verificarea:

**d.** verification:

Suma încărcărilor structurii compuse trebuie să fie aceeaşi cu suma încărcărilor sistemului principal:

The summation of the loads on the compound truss needs to be the same as the summation of loads on the main system:

$$\sum F_y^c = 11 \cdot F$$

$$\sum F_y^{(p)} = 5 \cdot F + 12 \cdot F / 2 = 11 \cdot F$$

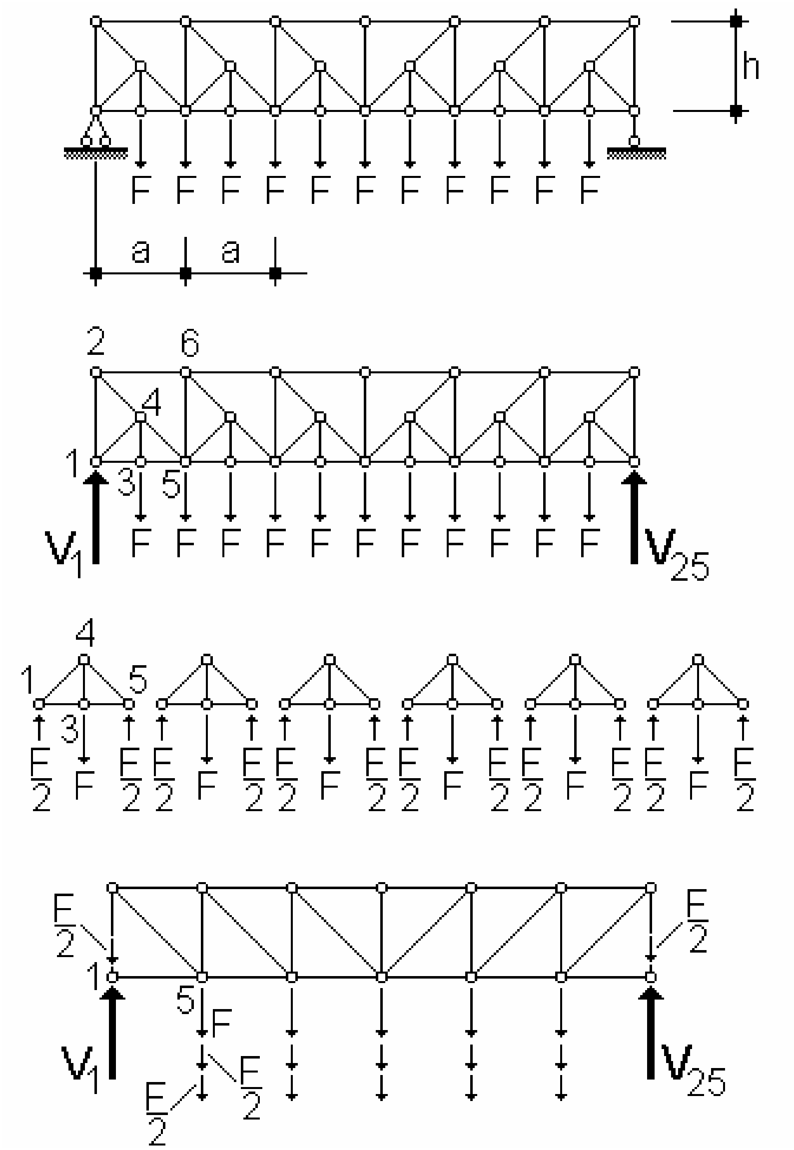
**e.** calculul eforturilor pentru fiecare sistem

**e.** calculation of the axial forces for each system

**f.** suprapunerea efectelor:

**f.** superposition of the effects:

$$N_{12} = N_{12}^p$$
$$N_{13} = N_{15}^p + N_{13}^s$$
$$N_{35} = N_{15}^p + N_{35}^s$$
$$N_{34} = N_{34}^s$$
$$N_{45} = N_{25}^p + N_{45}^s$$
$$N_{24} = N_{25}^p$$
$$N_{26} = N_{26}^p$$
$$N_{56} = N_{56}^p$$




a.

b.

**Fig.2.82**

**Grindă cu zăbrele compusă.** **Compound truss.**

**E 2.21** ✍

## 2.5.4 Calculul altor structuri cu zăbrele

Posibilitățile de calcul pentru structurile complexe sunt:

- metodele generale (separate sau combinate);

## 2.5.4 Analysis of other types of pin-jointed structures

The methods for the analysis of complex trusses are :

- general methods (separate or combined);

- o metodă generală, combinată cu o metodă particulară (metoda secțiunilor duble, metoda înlocuirii barelor, metoda lucrului mecanic virtual).

De obicei, cu ajutorul metodelor particulare, se calculează efortul axial în una sau mai multe bare, în vederea utilizării unei metode generale pentru determinarea eforturilor în celelalte bare.

Pentru calculul altor structuri cu zăbrele (grinzi Gerber, cadre, arce) se aplică:

- principiile generale prezentate în paragrafele anterioare pentru schema statică şi calculul reacțiunilor;
- metodele analizate anterior pentru calculul eforturilor axiale în bare, în raport cu sistemul de structură cu zăbrele (simplă, compusă sau complexă).

- a general method combined with a particular method (method of double sections, method of bar replacement, method of virtual work).

Usually the particular methods are used to calculate the axial force in one or more bars in order to use a general method for the calculation of the axial forces in the other bars.

For the analysis of other pin-jointed structures (Gerber beams, frames, arches), one uses:

- general principles presented in the previous paragraphs for the structural scheme and the calculation of reactions;
- methods previously presented for the calculation of the axial forces in the bars, depending on the type of pin-jointed structure (simple, compound or complex).

# 3

# PRINCIPIUL LUCRULUI MECANIC VIRTUAL

## STRUCTURI STATIC DETERMINATE

# PRINCIPLE OF VIRTUAL WORK

## DETERMINATE STRUCTURES

Principiul lucrului mecanic virtual se enunță astfel:

Condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem de forțe (acțiuni și reacțiuni) să fie în echilibru este ca lucrul mecanic virtual produs de forțe cu deplasările virtuale, compatibile cu legăturile, trebuie să fie zero.

Caracteristicile deplasărilor virtuale sunt:

- infinit mici;
- direcția lor este normală pe raza măsurată în raport cu centrul absolut de rotație al corpului respectiv (deplasarea are aceeași direcție ca viteza instantanee), fig.3.1;
- proporționale cu razele, fig.3.1.

Pentru a aplica principiul lucrului mecanic virtual în vederea calculului unei reacțiuni sau al unui efort la o structură static determinată, trebuiesc parcurse etapele următoare:

The principle of virtual work is stated as follows:

The condition necessary and sufficient for a system of forces (actions and reactions) to be in equilibrium is that the virtual work produced by the forces with the virtual displacements, compatible with the connections, needs to be equal to zero.

The characteristics of the virtual displacements are:

- infinitisimally small;
- their direction is perpendicular to the radius measured with respect to the absolute centre of rotation of that body (the displacement has the same direction as the instantaneous velocity), fig.3.1;
- proportional with the radii, fig.3.1.

In order to use the principle of virtual work to calculate the reactions or the internal forces in a statically determinate structure, the next steps have to be followed:

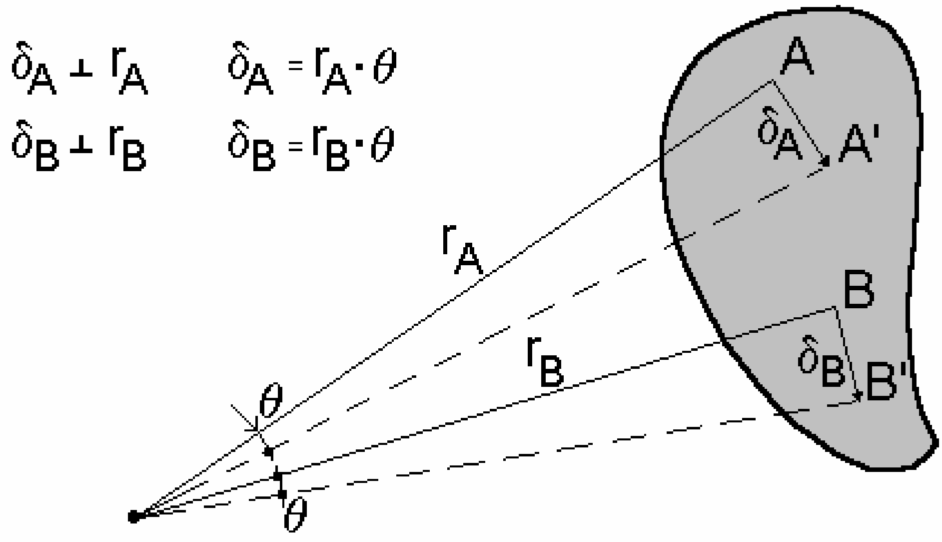



**Fig.3.1**

**Relația între deplasări şi raze.**

**Relationship between displacements and radii.**

**a.** Eliminarea legăturii exterioare (pentru o reacțiune) sau interioare (pentru un efort) necesare, în modul indicat în fig.3.2 şi 3.3, pentru:

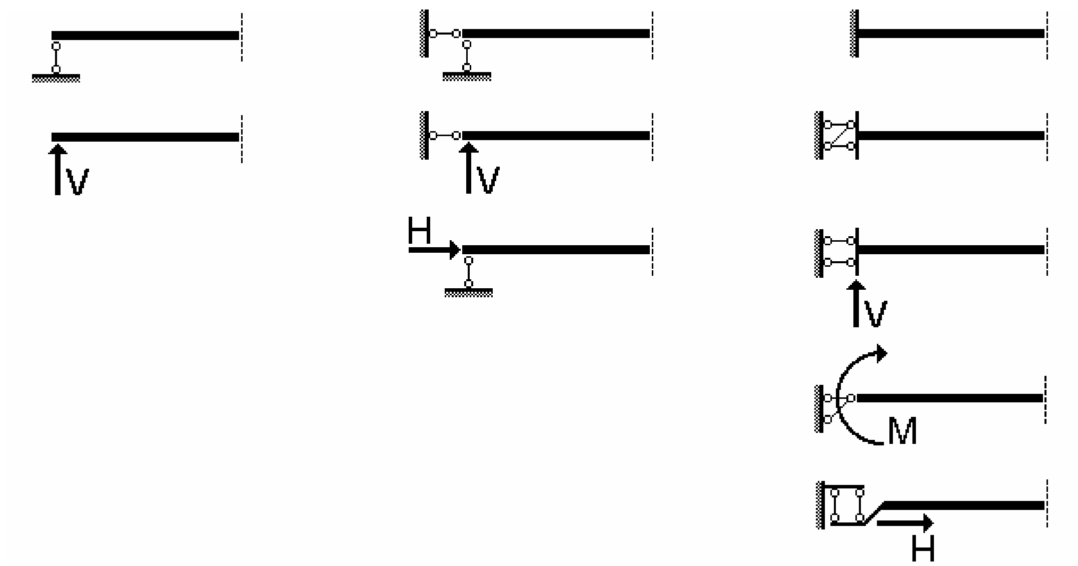
- reacțiunea dintr-un reazem simplu, fig.3.2.a;
- componentele V şi H dintr-o articulație, fig.3.2.b;
- componentele V, H şi M dintr-o încastrare, fig.3.2.c;
- forța tăietoare dintr-o secțiune oarecare, fig.3.3.a;
- momentul încovoietor dintr-o secțiune oarecare, fig.3.3.b;
- efortul axial dintr-o secțiune oarecare, fig.3.3.c.

Legătura eliminată este înlocuită prin reacțiunea sau efortul corespunzător, astfel încât sistemul rămâne echivalent cu structura inițială static determinată dar devine un mecanism pentru deplasări virtuale (fictive).

**a.** Release the corresponding external connection (for reaction) or internal connection (for internal load), as shown in fig.3.2. and 3.3, for:

- reaction in a roller support, fig.3.2.a;
- components V and H in a pin support (fig.3.2.b);
- components V, H and M in a built-in support, fig.3.2.c;
- shear force at a certain section, fig.3.3.a;
- bending moment at a certain section, fig.3.3.b;
- axial force at a certain section, fig.3.3.c.

The released connection is replaced by the corresponding reaction or interal force so that the system remains equivalent to the initial statically determinate structure but becomes a mechanism for the virtual (imaginary) displacements.

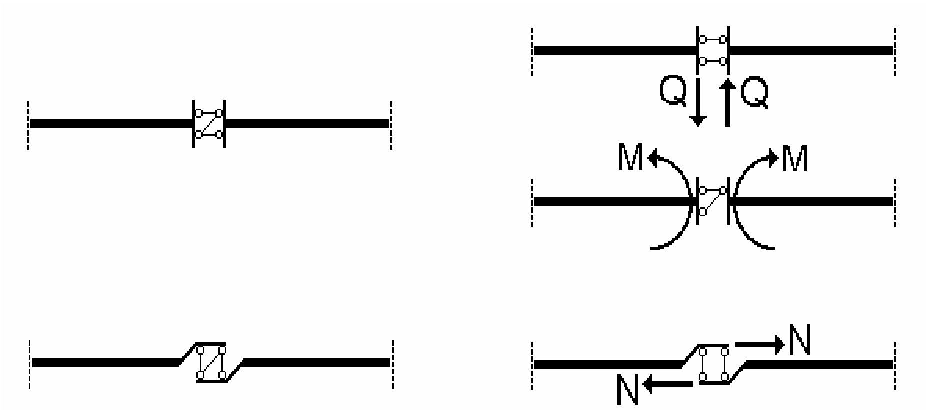



a. b. c.

**Fig.3.2**

**Legături exterioare diverse şi reacțiunile.**
a. - reazem simplu, b. - articulație,
c. - încastrare

**Different external connections and reactions.**
a. - roller support, b. - pin support,
c. - built-in support




a.
b.
c.

**Fig.3.3**

**Legături interioare diverse şi eforturi.**
a. - forță tăietoare, b. - moment încovoietor, c. - efort axial

**Different internal connections and internal forces.**
a. - shear force, b. - bending moment,
c. - axial force

**b.** Analiza cinematică a mecanismului obținut. Această etapă constă în:

- stabilirea numărului de corpuri componente (numerotate I, II, ...);
- identificarea eventualelor corpuri fixe;

**b.** kinematic analysis of the mechanism obtained. This step consists of:

- establish the number of component bodies (denoted by I, II, ...);
- identify the likely fixed bodies;

- stabilirea centrelor instantanee de rotație: centre absolute (care au viteza nulă, deci deplasarea nulă), notate cu (1,T), (2,T), ... şi centre relative (care au viteza relativă nulă şi sunt puncte comune în jurul cărora un corp se roteşte în raport cu altul), notate (1,2), (2,3), ....

Aceste centre de rotație se găsesc:

- direct: articulațiile exterioare sunt centre absolute, articulațiile interioare sunt centre relative;

- utilizând direcțiile cunoscute ale deplasărilor unor puncte (de obicei reazemele simple);

- utilizând teorema de coliniaritate a centrelor instantanee de rotație în două variante:

**Teorema I**
Pentru două corpuri I şi II ale unui mecanism, cele două centre absolute şi centrul lor relativ de rotație sunt coliniare, fig.3.4.

**Teorema II**
Pentru trei corpuri I, II şi III ale unui mecanism, cele trei centre relative de rotație sunt coliniare, fig.3.5.

Un caz frecvent este cel prezentat în fig.3.6, având două corpuri I şi II, legate cu două bare articulate. In acest caz, aplicând de două ori teorema II, rezultă:

(13),(23) → (12)
(13),(14) → (34)

deci centrul relativ (12) se găseşte la intersecția celor două bare articulate.

- establish the instantaneous centres of rotation : absolute centers (which have zero velocity, thus zero displacement), denoted by (1,T), (2,T), ... and relative centres (which have zero relative velocity, being common points around which a body is rotating relative to the other), denoted by (1,2), (2,3), ....

These centres can be found:

- directly: external pins are absolute centres, the internal pins are relative centres;

- by using the known displacement directions of certain points (usually the rollers);

- by using the colinearity theorem of the instantaneous centres of rotation in two versions:

**Theorem I**
For two bodies I and II of a mechanism, the two absolute centres and their relative centre of rotation are collinear, fig.3.4.

**Theorem II**
For three bodies I, II and III of a mechanism, the three relative centres of rotation are collinear, fig.3.5.

A frequently met case is the one shown in fig.3.6, having two bodies I and II, connected by two pinned bars. In this case, by applying the theorem II, it results:

(14),(24) → (12)
(23),(24) → (34)

thus the relative center (12) lies at the intersection of the two pinned bars.

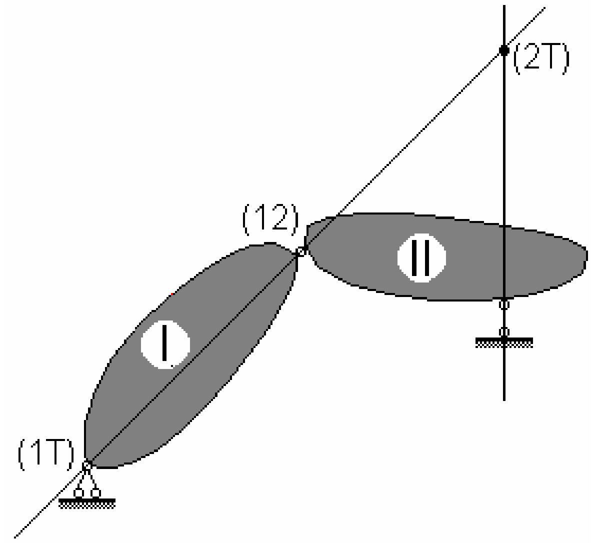



**Fig.3.4.**

**Teorema I de coliniaritate.** **Theorem I of colinearity.**

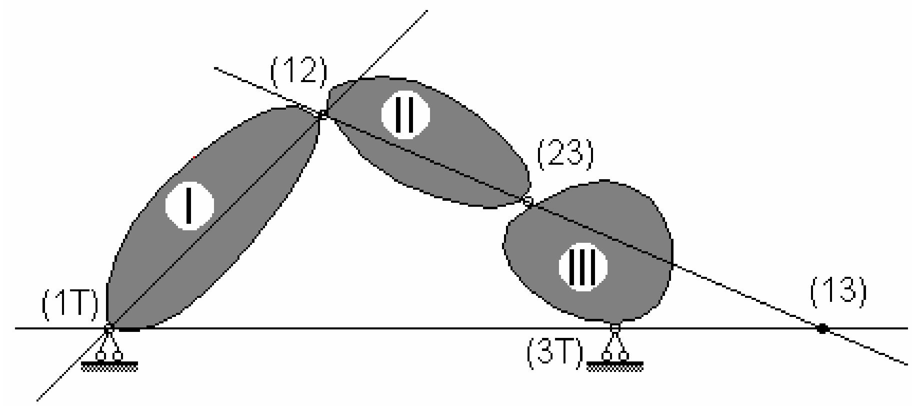



**Fig.3.5**

**Teorema II de coliniaritate.** **Theorem II of colinearity.**

In cazul particular din fig.3.7, unde cele două bare sunt paralele, centrul (1,2) se găseşte la infinit pe direcția celor două bare.

For the particular case shown in fig.3.7, where the two bars are parallel, the centre (1,2) lies at infinity, in the direction of the two bars.

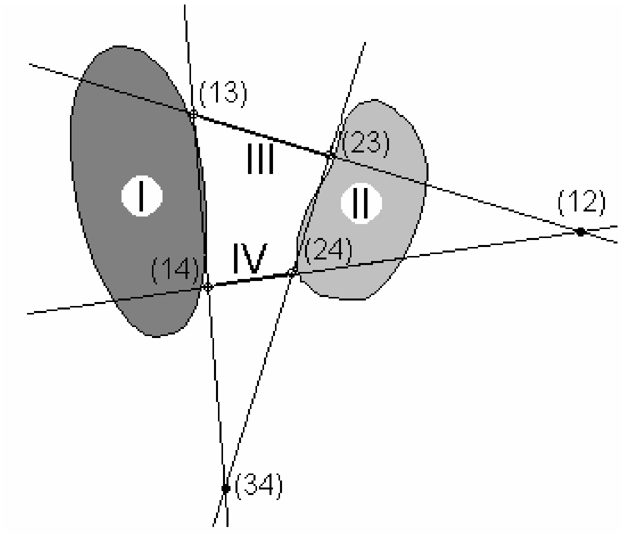



**Fig.3.6**

**Centrele instantanee relative de rotație pentru două corpuri.**

**Instantaneous relative centres of rotation for two bodies.**

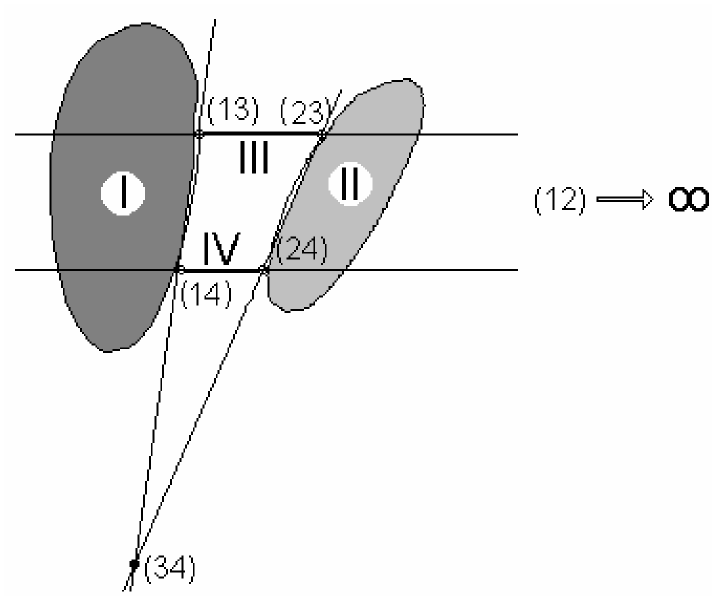



**Fig.3.7**

**Centrul relativ de rotație la infinit.**

**Relative centre of rotation at infinity.**

**c.** Determinarea diagramelor de deplasări virtuale pe direcție verticală, fig.3.8.b, şi pe direcție orizontală, fig.3.8.c, pentru mecanismul din fig.3.8.a, având în vedere că:

**c.** Draw the virtual displacement diagrams in the vertical direction, fig.3.8.b, and horizontal direction, fig.3.8.c, for the mechanism shown in fig.3.8.a, considering that:

- deplasările şi proiecţiile lor au variaţii liniare;
- diagramele au puncte de deplasare zero unde centrele absolute se proiectează pe cele două axe ;
- deplasarea unui centru relativ este aceeaşi pentru cele două corpuri corespunzătoare;
- axele de referinţă fiind perpendiculare şi unghiul θ fiind acelaşi, diagramele unui corp sunt la rândul lor perpendiculare; aceasta este, de fapt, o metodă de verificare pentru diagramele de deplasări, fig.3.8.b şi fig.3.8.c;
- se pot calcula deplasările şi unghiurile de rotaţie a corpurilor, fig.3.8.a, prin raportarea la un parametru cunoscut oarecare; de exemplu, considerând ca parametru unghiul de rotaţie $\theta_1$, fig.3.8.b, putem calcula:

- the displacements and their projections have linear variations;
- the diagrams have points of zero displacement where the absolute centres are projected on the two axes;
- the displacement of a relative centre is the same for the two corresponding bodies;
- since the reference axes are perpendicular to each other and the θ angle is the same, the diagrams of a body are also perpendicular to each other; this is actualy a verification method for the displacement diagrams, fig.3.8.b and fig.3.8.c;
- the displacements and angles of rotation of the bodies can be calculated as a function of a certain known parameter, fig.3.8.a; for example, considering as a parameter the angle of rotation $\theta_1$, fig.3.8.b, one can calculate:

$$\delta_{23}^{h} = (h_4 + h_5) \cdot \theta_2 = (h_4 + h_5) \cdot \frac{d_1}{d_2} \cdot \theta_1$$

d. Scrierea condiţiei de echilibru prin lucru mecanic virtual:

d. Write the equilibrium condition by virtual work:

$$\overline{W} = \sum \pm F_i \cdot \delta_i + \sum \pm M_k \cdot \theta_k + \sum \pm p_j \cdot A_j \qquad \textbf{(3.1)}$$

de unde, simplificând parametrul arbitrar considerat, vom deduce mărimea statică cautată (reacţiune sau efort).

in which, by simplifying the arbitrary parameter considered, one can calculate the static quantity sought (reaction or internal force).

In relaţia (3.1), ultimul termen corespunde încărcărilor uniform distribuite, $A_j$ fiind ariile diagramelor de deplasări (se pot, de asemenea, înlocui încărcările distribuite cu rezultantele lor concentrate pe tronsoane având diagramele de deplasări continue).

In the relationship (3.1), the last term corresponds to the uniformly distributed load; $A_j$ are the areas of the displacement diagrams (the distributed loads can also be replaced by their resultant forces, as point loads in regions with continuous displacement diagrams).

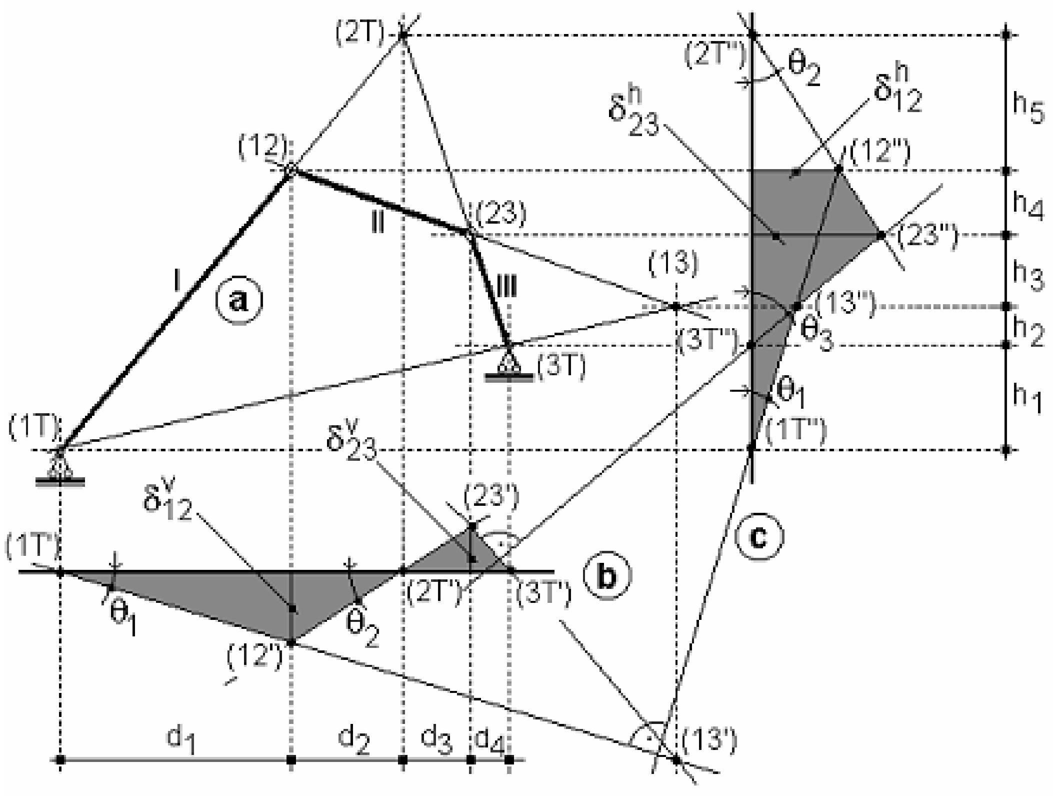



**Fig.3.8**

**Diagrame de deplasări virtuale.**
a. - mecanism, b. - pe direcție verticală, c.- pe direcție orizontală

**Diagrams of virtual displacements.**
a. - mechanism, b. - vertical direction, c. - horizontal direction

**Exemplu / Example 3.1**

Să se determine reacțiunea $V_1$ pentru grinda simplu rezemată din fig.3.9.a.

Se elimină reazemul simplu 1 și se înlocuiește cu reacțiunea $V_1$, obținând mecanismul din fig.3.9.b, pentru care (1T) se determină direct, fig.3.9.c.

Din diagrama de deplasări virtuale pe direcție verticală din fig.3.9.c, rezultă:

Determine the reaction $V_1$ for the simply supported beam shown in fig.3.9.a.

The roller support 1 is removed, being replaced by the reaction $V_1$, resulting in the mechanism shown in fig.3.9.b, for which (1T) is directly determined, fig.3.9.c.

From the diagram of virtual displacements in the vertical direction in fig.3.9.c, one obtains:

$$\delta_{V_1} = \mathbf{L} \cdot \theta_1$$

$$\delta_P = \frac{3}{4}\mathbf{L} \cdot \theta_1$$

$$\overline{\mathbf{W}} = -\mathbf{V_1} \cdot \delta_{V_1} + \mathbf{P} \cdot \delta_P = 0$$

de unde: resulting in:

$$\mathbf{V_1 = P \cdot \frac{\delta_P}{\delta_{V_1}} = P \cdot \frac{3/4 \cdot L \cdot \theta_1}{L \cdot \theta_1} = \frac{3}{4} P}$$

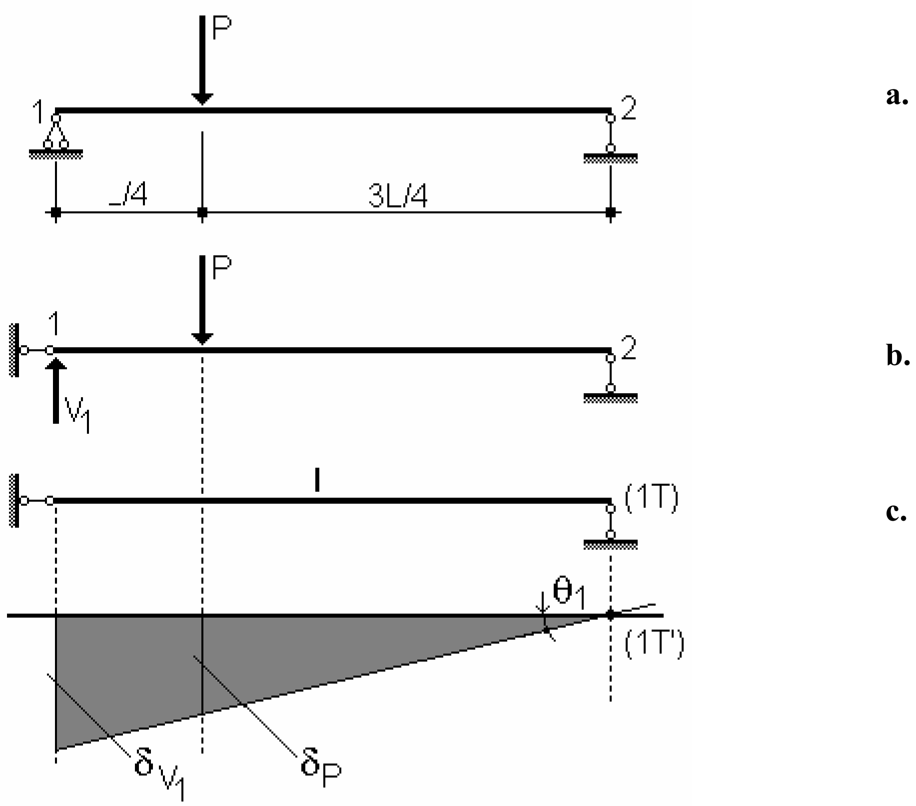



**Fig.3.9**

**Diagrama de deplasări virtuale pentru o grindă cu două reazeme simple.**

**Diagram of virtual displacements for a beam with two rollers.**

**E 3.1** ✍

**Exemplu / Example 3.2**

Să se determine efortul $M_2$ pentru grinda Gerber din fig.3.10.a.

Determine the bending moment $M_2$ for the Gerber beam shown in fig.3.10.a.

Introducând o articulație pe reazemul 2 și perechea de momente $M_2$, se obține mecanismul din fig.3.10.b și diagrama de deplasări din fig.3.10.c, unde:

By introducing a pin and the couple moments $M_2$ at support 2, the mechanism shown in fig.3.10.b and the displacement diagram shown in fig.3.10.c are obtained, resulting in:

$\delta_3 = 2 \cdot \theta_2 = 8 \cdot \theta_3$ deci / thus: $\theta_3 = 0.25 \cdot \theta_2$

$$\delta_5 = 2 \cdot \theta_3 = 0.5 \cdot \theta_2$$

Ecuația de echilibru este: The equation of equilibrium is:

$$\overline{W} = -M_2 \cdot \theta_2 + 80 \cdot \delta_5 = 0$$

de unde / resulting in: $M_2 = 40$ KN

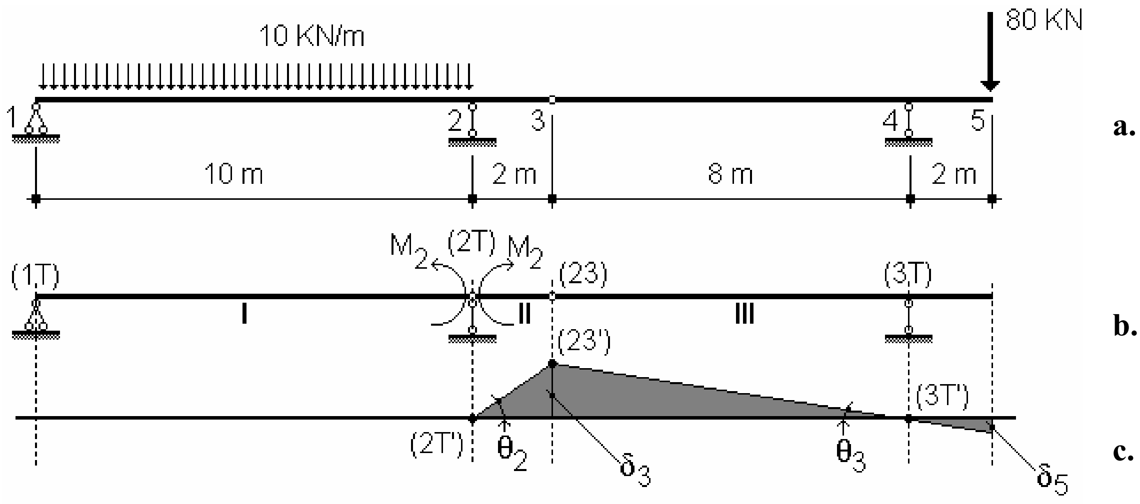



**Fig.3.10**

a. - Grinda Gerber, b. - analiza cinematică, c. - diagrama de deplasări virtuale pentru $M_2$

a. - Gerber beam, b. - kinematic analysis, c. - diagram of virtual displacements for $M_2$

| **E 3.2** ✍ |
|---|

| **Exemplu / Example 3.3** |
|---|

Să se determine eforturile $Q_2$ la stânga și la dreapta reazemului 2 pentru grinda Gerber din fig.3.10.a.

Determine the shear force $Q_2$ to the left and right of support 2 for the Gerder beam shown in fig.3.10.a.

Pentru calculul forței tăietoare la stânga reazemului 2, mecanismul este cel din fig.3.11.a și se obține diagrama de deplasări virtuale din fig.3.11.b, unde:

Fig.3.11.a shows the mechanism for the calculation of the shear force to the left of support 2. The corresponding diagram of virtual displacements is shown in fig.3.11.b, where:

$\theta_1 = \theta_2$ - deplasările barelor I și II sunt paralele / the displacements of the bars I and II are parallel)

$\delta_2 = 10 \cdot \theta_1$

$\delta_3 = 2 \cdot \theta_2 = 2 \cdot \theta_1 = 8 \cdot \theta_3$ deci / thus: $\theta_3 = 0.25 \cdot \theta_1$

$\delta_5 = 2 \cdot \theta_3 = 0.5 \cdot \theta_1$

Ecuația de lucru mecanic virtual este:

The equation of virtual work is:

$-Q_2 \cdot \delta_2 - 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \delta_2 + 80 \cdot \delta_5 = 0$ de unde / resulting in: $Q_2 = -46\ \text{KN}$

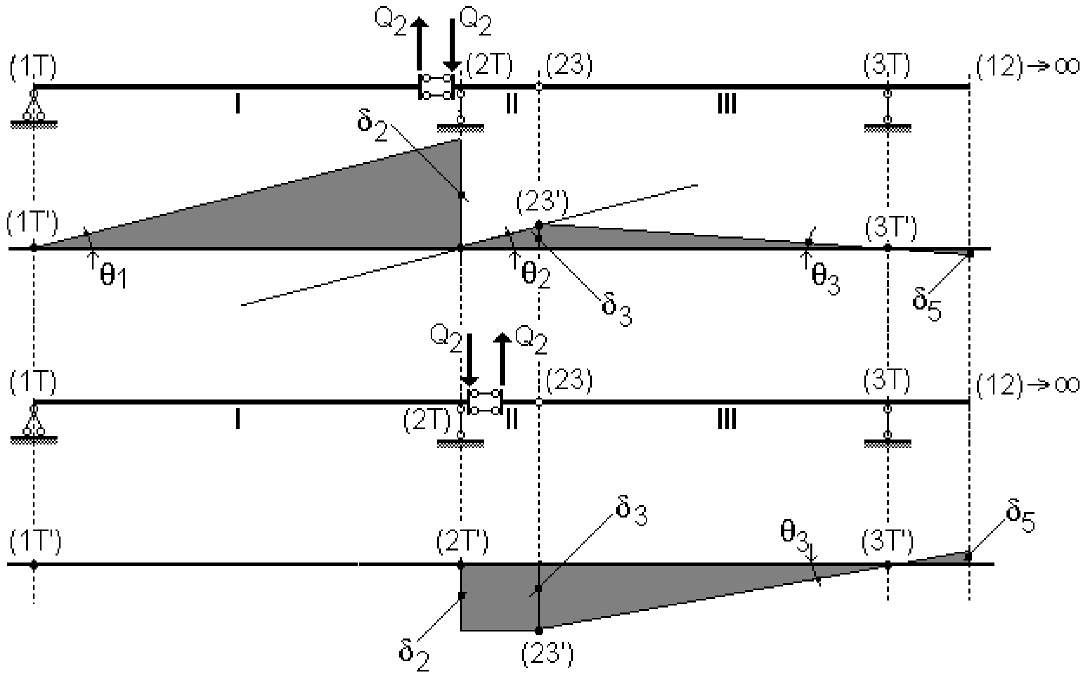



**Fig.3.11**

a. şi c. - analiza cinematică,
b. şi d. -diagramele de deplasări virtuale pentru Q - grinda Gerber din fig.3.10a.

a. and c. - kinematic analysis,
b. and d. -diagrams of virtual displacements for Q - Gerber beam in fig.3.10.a.

Pentru a calcula forța tăietoare la dreapta reazemului 2, mecanismul este cel din fig.3.11.c şi se obține diagrama de deplasări virtuale din fig.3.11.d, unde:

Fig.3.11.c shows the mechanism for the calculation of the shear force to the right of support 2. The corresponding diagram of virtual displacements is shown in fig.3.11.d, where:

$\delta_2 = \delta_3 = 8 \cdot \theta_3$

$\delta_5 = 2 \cdot \theta_3$

şi:

and:

$\overline{W} = -Q_2 \cdot \delta_2 - 80 \cdot \delta_5 = 0$ de unde / resulting in: $Q_2 = -20$ KN

**E 3.3**

**Exemplu / Example 3.4**

Să se determine reacțiunile $V_1$, $H_1$ şi eforturile $N_i$, $Q_k$, $M_k$ pentru cadrul din fig.3.12.

Determine the reactions $V_1$, $H_1$ and the internal forces $N_i$, $Q_k$, $M_k$ for the frame shown in fig.3.12.

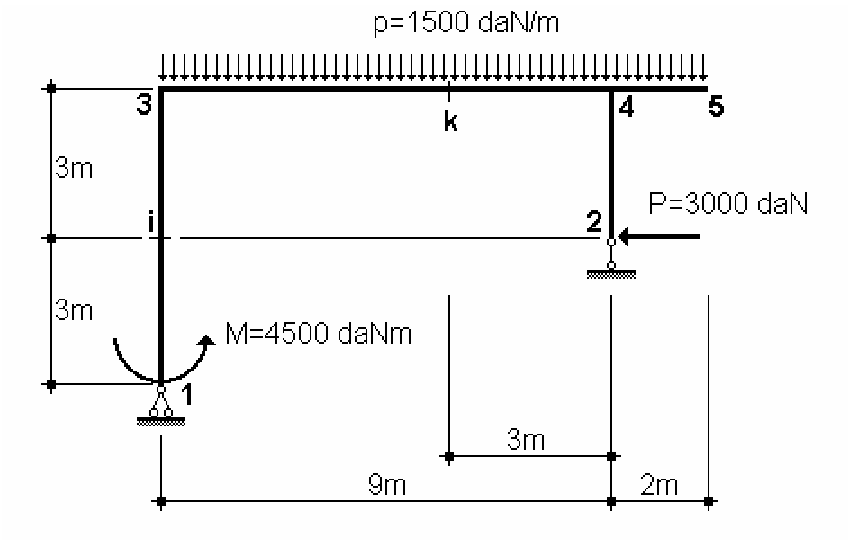



**Fig.3.12**

**Cadru static determinat.** **Statically determinate frame.**

Pentru calculul reacțiunii $V_1$, mecanismul şi diagrama de deplasări virtuale sunt cele din fig.3.13. Se poate scrie:

For the calculation of reaction $V_1$, the mechanism and the diagram of virtual displacements are shown in fig.3.13. One can write:

$$\overline{W} = -V_1 \cdot \delta_1^V + p \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta_1^V \cdot 9 - p \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta_5^V \cdot 2 + P \cdot \delta_2^h + M \cdot \theta_1 = 0$$

dar: but:

$$\delta_1^v = 9 \cdot \theta_1 \qquad \delta_5^v = 2 \cdot \theta_1 \qquad \delta_2^h = 3 \cdot \theta_1$$

deci: thus:

$$-V_1 \cdot 9 \cdot \theta_1 + 1500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \theta_1 \cdot 9 - 1500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \theta_1 \cdot 2 + 3000 \cdot 3 \cdot \theta_1 + 4500 \cdot \theta_1 = 0$$

de unde / resulting in: $V_1 = 7917$ daN

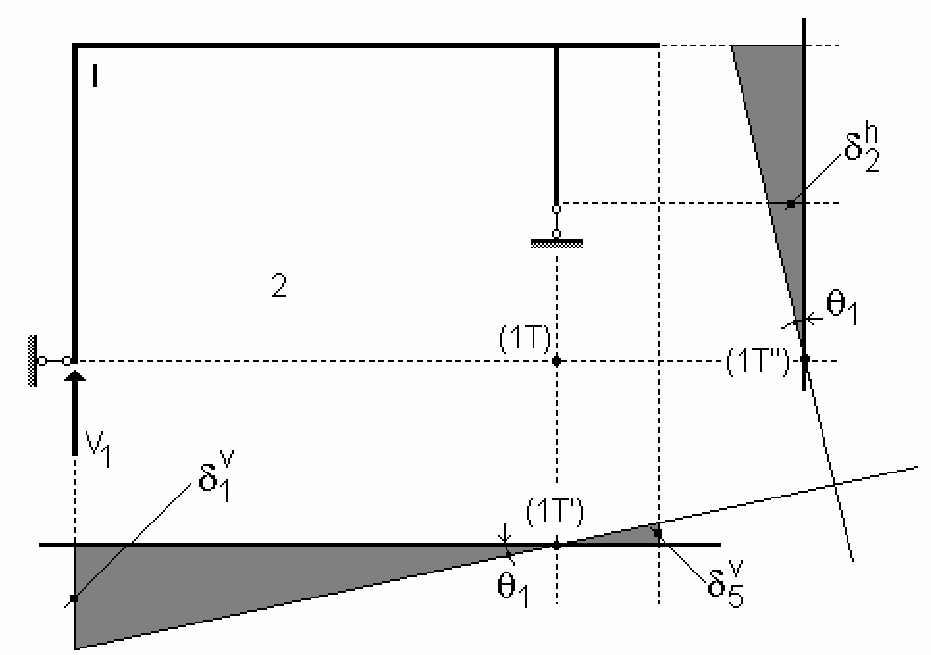



**Fig.3.13**

**Analiza cinematică şi diagramele de deplasări virtuale pentru $V_1$ - cadrul din fig.3.12.**

**Kinematic analysis and diagrams of virtual displacements for $V_1$ - frame shown in fig.3.12.**

Pentru calculul reacțiunii $H_1$, mecanismul şi diagramele de deplasări virtuale sunt cele din fig.3.14. Se poate scrie:

For the calculation of reaction $H_1$, the mechanism and the diagrams of virtual displacements are shown in fig.3.14. One can write:

$$-H_1 \cdot \delta_1^h + P \cdot \delta_1^h = 0$$

de unde / resulting in: $H_1 = P = 3000$ daN

Pentru calculul efortului $N_i$, mecanismul şi diagrama de deplasări virtuale sunt cele din fig.3.15. Se poate scrie:

For the axial force $N_i$, the mechanism and the diagram of virtual displacements are shown in fig.3.15. One can write:

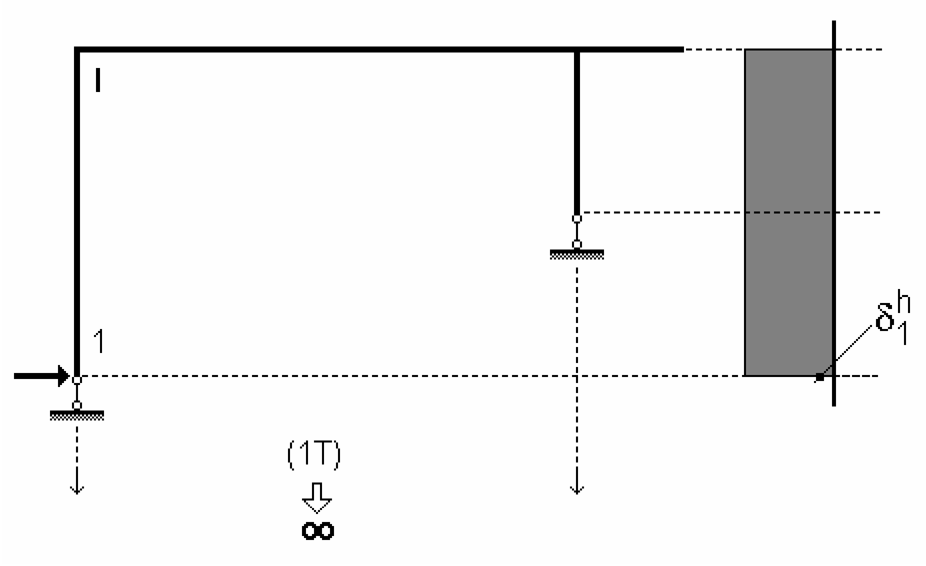



**Fig.3.14**

**Analiza cinematică şi diagrama de deplasări virtuale pentru $H_1$ - cadrul din fig.3.12.**

**Kinematic analysis and diagram of virtual displacements for $H_1$ - frame shown in fig.3.12.**

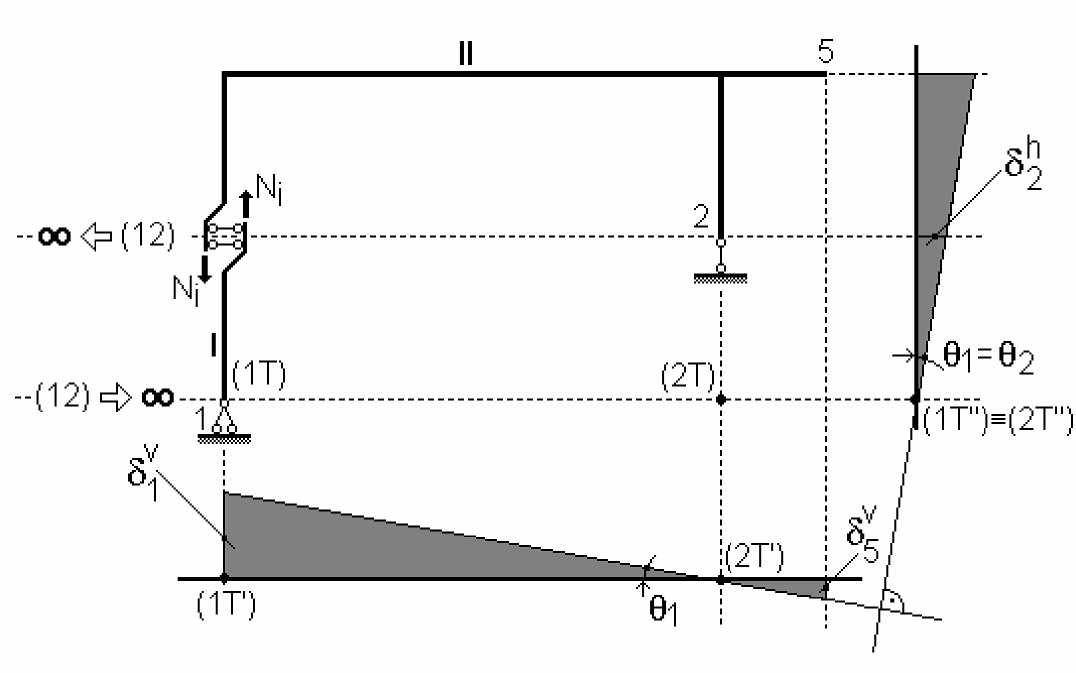



**Fig.3.15**

**Analiza cinematică şi diagramele de deplasări virtuale pentru $N_i$ - cadrul din fig.3.12.**

**Kinematic analysis and diagrams of virtual displacements for $N_i$ - frame shown in fig.3.12.**

$$-N_i \cdot \delta_1^v - p \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta_1^v \cdot 9 + p \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta_5^v \cdot 2 - P \cdot \delta_2^h - M \cdot \theta = 0$$

Se vede că: It can be noticed that:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta$$

deoarece centrul (12) este la infinit. since the centre (12) is at infinity.

$$\delta_1^v = 9 \cdot \theta_1 \qquad \delta_5^v = 2 \cdot \theta_1 \qquad \delta_2^h = 3 \cdot \theta_1$$

deci: thus:

$$-N_i \cdot 9 \cdot \theta - 1500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \theta \cdot 9 + 1500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \theta \cdot 2 - 3000 \cdot 3 \cdot \theta - 4500 \cdot \theta = 0$$

de unde / resulting in:

$$N_i = -7916 \text{ daN}$$

Pentru calculul efortului $Q_k$, mecanismul şi diagrama de deplasări virtuale sunt cele din fig.3.16. Se poate scrie:

For the calculation of the shear force $Q_k$, the mechanism and the diagram of virtual displacements are shown in fig.3.16. One can write:

$$-Q_k \cdot \delta_{kg}^v - Q_k \cdot \delta_{kr}^v - p \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta_{kg}^v \cdot 6 + p \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta_{kr}^v \cdot 3 - p \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta_5^h \cdot 2 + P \cdot \delta_2^h + M \cdot \theta_2 = 0$$

Se vede că: It can be noticed that:

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta$$

deoarece centrul (12) este la infinit; since the centre (12) is at infinity;

$$\delta_{kg}^v = 6 \cdot \theta_1 \qquad \delta_{kr}^v = 3 \cdot \theta_2 \qquad \delta_5^v = 2 \cdot \theta_2 \qquad \delta_2^h = 3 \cdot \theta_1$$

deci: thus:

$$-Q_k \cdot (6 \cdot \theta + 3 \cdot \theta) - 1500 \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \theta \cdot 6 + 1500 \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \theta \cdot 3 - 1500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \theta \cdot 2 + 3000 \cdot 3 \cdot \theta + 4500 \cdot \theta = 0$$

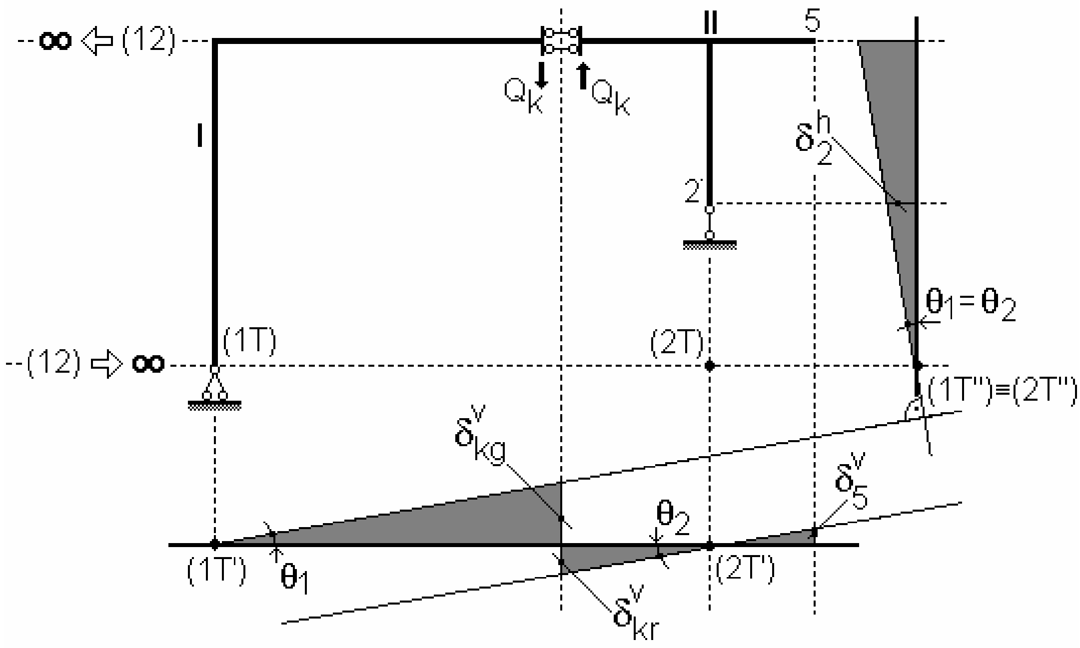



Fig.3.16

**Analiza cinematică şi diagramele de deplasări virtuale pentru $Q_k$ - cadrul din fig.3.12.**

**Kinematic analysis and diagrams of virtual displacements for $Q_k$ - frame shown in fig.3.12.**

de unde / resulting in: $Q_k = -1083\ \text{daN}$

Pentru calculul efortului $M_k$, mecanismul şi diagrama de deplasări virtuale sunt cele din fig.3.17. Se poate scrie:

For the calculation of the bending moment $M_k$, the mechanism and the diagram of virtual displacements are shown in fig.3.17. One can write:

$$-M_k \cdot \theta_1 - M_k \cdot \theta_2 + p \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta_k^v \cdot 6 + p \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta_k^v \cdot 3 - p \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta_5^v \cdot 2 - P \cdot \delta_2^h - M \cdot \theta_1 = 0$$

dar: / but:

$$\delta_k^v = 6 \cdot \theta_1 = 3 \cdot \theta_2$$

deci / thus: $\theta_2 = 2 \cdot \theta_1$

$$\delta_5^v = 2 \cdot \theta_2 = 4 \cdot \theta_1 \qquad \delta_2^h = 6 \cdot \theta_2 = 12 \cdot \theta_1$$

Inlocuind în ecuație:

By substituting into the following equation:

$$-M_k(\theta_1 + 2 \cdot \theta_1) + 1500\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \theta_1 \cdot 6 + 1500\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \theta_1 \cdot 3 - 1500\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \theta_1 \cdot 2 - 3000 \cdot 12 \cdot \theta_1 - 4500 \cdot \theta_1 = 0$$

se obține:

one obtains:

$$M_k = -2000 \text{ daN} \cdot \text{m}$$

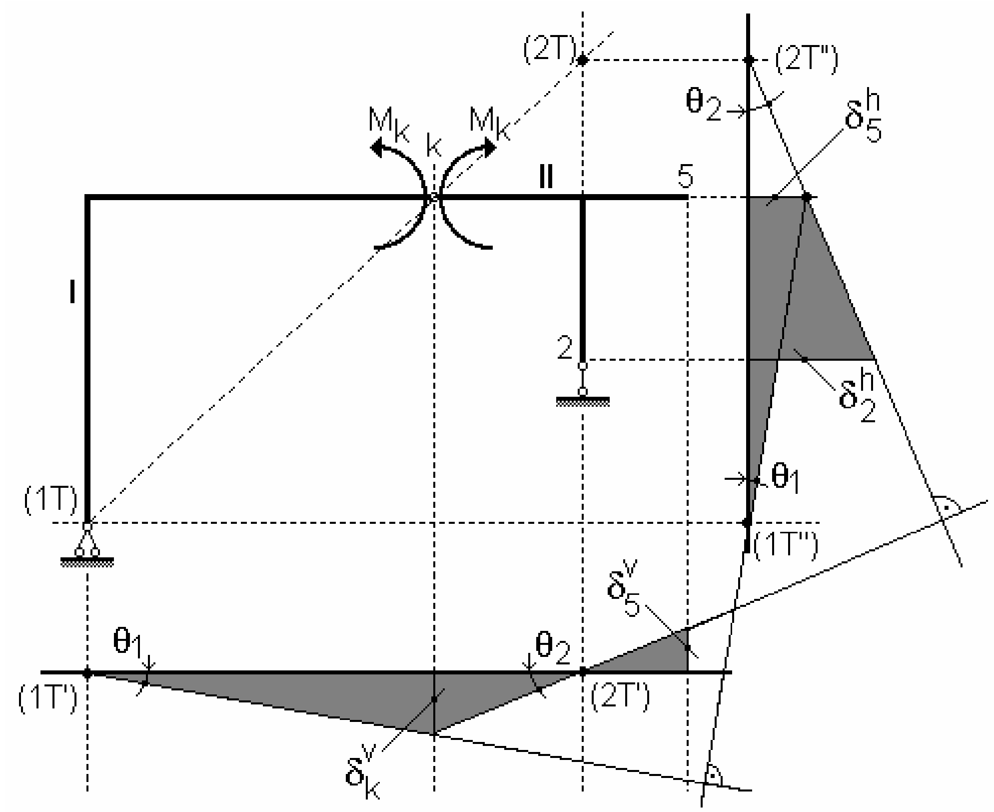



**Fig.3.17**

**Analiza cinematică şi diagramele de deplasări virtuale pentru $M_k$ - cadrul din fig.3.12**

**Kinematic analysis and diagrams of virtual displacements for $M_k$ - frame shown in fig.3.12.**

**E 3.4**

# 4

# INCARCARI MOBILE
## STRUCTURI STATIC DETERMINATE

# MOVING LOADS
## STATICALLY DETERMINATE STRUCTURES

Incărcările mobile sunt specifice pentru calculul grinzilor de rulare ale podurilor din construcţiile industriale şi ale podurilor de şosele şi căi ferate.

The moving loads are specific to the analysis of gantry girders in the construction industry and girders of roadway and railway bridges.

Convoaiele de încărcări sunt schematizate în general ca succesiuni de încărcări concentrate, având valorile şi distanţele dintre ele date.

The trains of loads are generally represented as successive point forces, having the magnitude and the distance between them known.

In raport cu încărcările fixe, sub acţiunea forţelor mobile, reacţiunile, eforturile şi deplasările structurii îşi schimbă în mod continuu valorile şi uneori chiar sensul.

Compared to the fixed loads, the reactions, internal forces and displacements in a structure change continuously their magnitude and sometimes their sense under moving loads.

Pentru a calcula o structură supusă la încărcări moving este deci necesar să se studieze variaţia reacţiunilor şi a eforturilor produse prin deplasarea acestor încărcări pe **linia de încărcare** (porţiunea din structură pe care acţionează forţele mobile), pentru a stabili valoarea maximă (şi minimă) a mărimilor statice corespunzătoare.

In order to analyse a structure subjected to moving loads, it is neccesary to study the variation of reactions and internal forces due to the movement of such loads on the **loading line** (region of the structure on which the moving loads are acting). The maximum (and minimum) value of the corresponding static quantities are thus determined.

Pentru a rezolva această problemă, se foloseşte un instrument general denumit **"linie de influenţa"**.

In order to resolve this problem, a general means is used, called **“influence line”**.

Considerând convoiul de încărcare într-o poziție oarecare pe structură, fig.4.1.a, orice mărime statică $S_i$ (reacțiune sau efort) poate fi exprimată, prin suprapunere de efecte, astfel:

Considering the train of loads in a certain position on the structure, fig.4.1.a, any static quantity $S_i$ (reaction or internal force) can be expressed by the superposition of effects as follows:

$$\mathbf{S_i = S_i^{(F_1)} + S_i^{(F_2)} + ... + S_i^{(F_j)} + ... + S_i^{(F_n)}} \qquad \textbf{(4.1)}$$

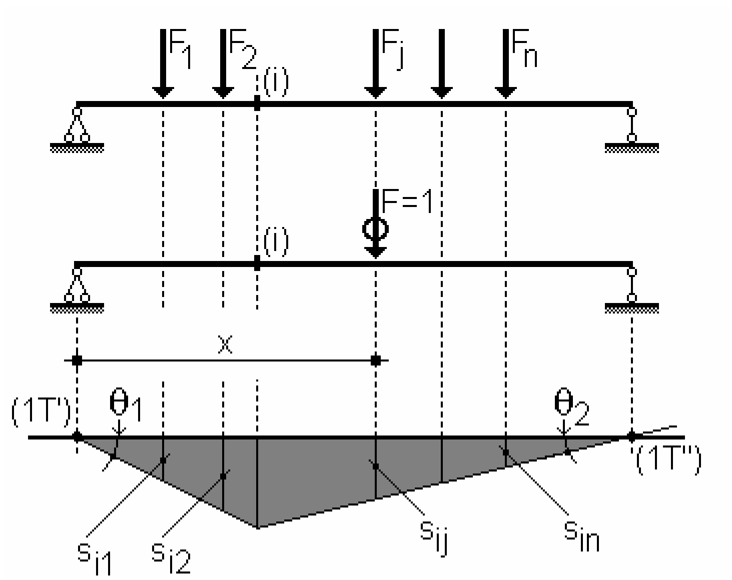
sau:

or :

$$\mathbf{S_i = s_{i1} \cdot F_1 + s_{i2} \cdot F_2 + ... + s_{in} \cdot F_n = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \cdot F_j} \qquad \textbf{(4.2)}$$

unde s-a notat cu $s_{ij}$ valoarea mărimii statice $S_i$ produsă de o forță $F_j = 1$.

$s_{ij}$ is the value of the static quantity $S_i$ produced by a force $F_j = 1$.




a.

b.

c.

**Fig.4.1**

**Linia de influență pentru o grindă simplu rezemată.**

**Influence line for a simply supported beam.**

Mărimile $s_{ij}$ sunt denumite **coeficienți de influență** deoarece reprezintă efectul (deci influența) unei forțe egale cu unitatea asupra mărimii statice considerate $S_i$.

The quantities $s_{ij}$ are called **influence coefficients** since they represent the efect (thus the influence) of a unit force on the magnitude of the static quantity $S_i$ under consideration.

Tinând cont de faptul că un convoi de încărcări poate avea o infinitate de poziții pe linia de încărcare a structurii, trebuie să se cunoască toate valorile coeficienților de influență pentru fiecare mărime statică $S_i$ analizată. De aceea se consideră o forță mobilă, egală cu unitatea, pe linia de încărcare a structurii, fig.4.1.b, şi se reprezintă grafic variația mărimii statice studiate $S_i$, obținând astfel o diagramă care este denumită **"linie de influență".**

**Definiție:**

Linia de influență statică este o diagramă care reprezintă variația unei reacțiuni sau a unui efort, produsă de o forță egală cu unitatea (de obicei verticală), care se deplasează pe linia de încărcare a structurii.

Intr-o linie de influență oarecare pentru $S_i$, fig.4.1.c:

- $S_{i1}$ - mărimea statică $S_i$ produsă de o forță $F=1$ care acționează în secțiunea **1**;
- $S_{i2}$ - mărimea statică $S_i$ produsă de o forță $F=1$ care acționează în secțiunea **2**;
- $S_{in}$ - mărimea statică $S_i$ produsă de o forță $F=1$ care acționează în secțiunea **n**;
- $S_{ij}$ - mărimea statică $S_i$ produsă de o forță $F=1$ care acționează în secțiunea **j**;

şi aşa mai departe.

In general, o ordonată $s_{ij}$ a unei linii de influență pentru $S_i$ reprezintă valoarea lui $S_i$ când $F=1$ se găseşte în dreptul secțiunii **j**.

## 4.1 METODE PENTRU TRASAREA LINIILOR DE INFLUENTA

Există două metode pentru a trasa liniile de influență:

Considering that a train of loads can have an infinity of positions on the loading line of the structure, all the values of the influence coefficients must be known for each analysed static quantity $S_i$. Therefore, a unit force moving across the loading line of the structure is considered, fig.4.1.b and the variation of the static quantity $S_i$ is represented graphically, obtaining a diagram called **"influence line"**.

**Definition :**

The static influence line is a diagram representing the variation of a reaction or internal force, produced by a unit force (usually vertical) which moves across the loading line of the structure.

In any inflence line for $S_i$, fig.4.1.c:

- $S_{i1}$ - the static quantity $S_i$ produced by a force $F=1$ acting at section **1**;
- $S_{i2}$ - the static quantity $S_i$ produced by a force $F=1$ acting at section **2**;
- $S_{in}$ - the static quantity $S_i$ produced by a force $F=1$ acting at section **n**;
- $S_{ij}$ - the static quantity $S_i$ produced by a force $F=1$ acting at section **j**;

and so on.

Generally, an ordinate $s_{ij}$ of an influence line for $S_i$ represents the value of $S_i$ when $F=1$ is acting at the section **j**.

## 4.1 METHODS CONSTRUCTING INFLUENCE LINES

There two methods for the construction of the influence lines :

**i. analitică**

**ii. cinematică**

**i. analytical**

**ii. kinematic**

## 4.1.1 Metoda analitică

Ca principiu, considerând acțiunea forței mobile $F=1$, se scrie expresia mărimii $S_i$ pentru fiecare poziție distinctă a forței şi, reprezentând grafic expresiile obținute, rezultă linia de influență.

## 4.1.1 Analytical method

In principle, considering the action of the moving load $F=1$, the expression of the quantity $S_i$ is written for each distinct possition of the load and, by representing graphically these expressions, the influence line is constructed.

**Exemplu / Example 4.1**

Să se traseze linia de influență pentru reacțiunile $V_1$ şi $V_2$ ale grinzii simplu rezemate din fig. 4.2.a.

Draw the influence line for the reactions $V_1$ and $V_2$ of the simply supported beam in fig.4.2.a.

Expresia reacțiunii $V_1$ este unică şi rezultă astfel:

The expression of the reaction $V_1$ is unique and has the form:

$$\sum \mathbf{M_1 = 0} : \qquad \mathbf{V_1 \cdot L - 1 \cdot (L - x) = 0}$$

de unde:

resulting in:

$$\mathbf{V_1 = \frac{1 \cdot (L - x)}{L}}$$

Deci $V_1$ variază după o lege liniară şi avem:

Consequently, $V_1$ has a linear variation, resulting in :

- pentru / for $x = 0$ ( $F = 1$ în secțiunea 1 / at section 1) $V_1 = 1 = v_{11}$
- pentru / for $x = L$ ( $F = 1$ în secțiunea 2 / at section 2) $V_1 = 0 = v_{21}$

rezultând linia de influență din fig.4.2.b.

resulting in the influence line shown in fig.4.2.b.

a.

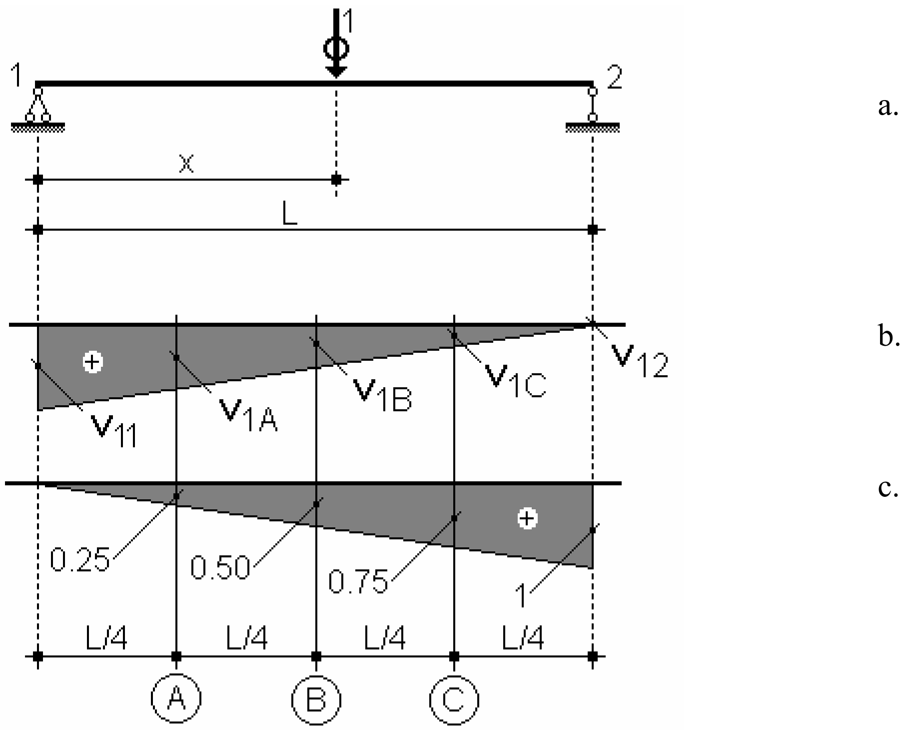



**Fig.4.2**

**Liniile de influență ale reacțiunilor pentru o grindă simplu rezemată**
a. - grinda simplu rezemată,
b. - reacțiunea $V_1$, c. - reacțiunea $V_2$

**Influence line for reactions of a simply supported beam**
a. - simply supported beam, b. - reaction $V_1$,
c. - reaction $V_2$

Pentru $F = 1$ în secțiunile A, B, C, se obține:

For $F = 1$ at sections A, B, C, one obtains:

$$v_{1A} = 0.75$$

$$v_{1B} = 0.50$$

$$v_{1C} = 0.25$$

In fig.4.2.c este reprezentată direct linia de influență pentru reacțiunea $V_2$, având ordonatele caracteristice:

Fig.4.2.c shows directly the influence line for the reaction $V_2$, having the characteristic ordinates:

$$v_{21} = 0.00$$

$$v_{2A} = 0.25$$

$$v_{2B} = 0.50$$

$$v_{2C} = 0.75$$

$$v_{22} = 1.00$$

Se notează cu $v_{ij}$ **coeficientul de influență**, reprezentând valoarea reacțiunii $V_i$ produsă de o forță $F = 1$ ce acționează în secțiunea **j**.

One denotes by $v_{ij}$ **the influence coefficient**, which represents the value of the reaction $V_i$ due to a load $F = 1$ acting at section **j**.

| **E 4.1** ✍ |
|---|

## 4.1.2 Metoda cinematică

Se utilizează principiul lucrului mecanic virtual în etapele analizate în **cap. 3**, deci:

- eliminarea legăturii exterioare sau interioare corespunzătoare reacțiunii sau efortului $S_i$, care este înlocuită cu mărimea statică respectivă;
- analiza cinematică a mecanismului obținut;
- construirea diagramei deplasărilor după direcția verticală (deoarece $F = 1$ este întotdeauna veticală); această diagramă reprezintă forma liniei de influență (se face convenția următoare: deplasarea mecanismului este dată întotdeauna în sens contrar în raport cu sensul pozitiv al lui $S_i$);
- scriind condiția de lucru mecanic virtual egal cu zero, se obțin **semnele şi scara liniei** de influență.

## 4.1.2 Kinematic method

The principle of virtual work is used following the steps shown in **chapter 3**, thus:

- remove the external or internal connection corresponding to the reaction or the internal load $S_i$ and replace it by the corresponding static quantity;
- kinematic analysis of the mechanism obtained;
- draw the displacement diagram in the vertical direction (since the $F = 1$ is always vertical); this diagram represents the shape of the influence line (the following convention is made: the displacement of the mechanism is always given in the opposite sense to the positive sense of $S_i$);
- by writting the condition of virtual work equals zero, **the signs and the scale** of the influence line are obtained.

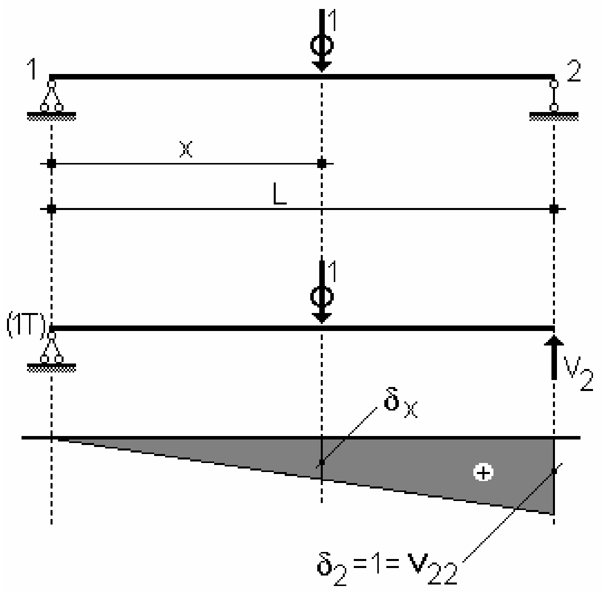
| **Exemplu / Example 4.2** |
|---|

Să se traseze linia de influență pentru reacțiunea $V_2$ a grinzii simplu rezemate din fig.4.3.a.

Eliminând reazemul simplu **2,** se obține mecanismul din fig. 4.3.b, compus dintr-un singur corp având centrul absolut de rotație în **1**. Diagrama deplasărilor după direcția verticală este prezentată în fig.4.3.c.

Draw the influence line for the reaction $V_2$ of the simply supported beam shown in fig.4.3.a.

By removing the roller support **2,** the mechanism in fig.4.3.b is obtained. This is composed of a single body having the absolute centre of rotation at **1**. The displacement diagram in the vertical direction is shown in fig.4.3.c.




a.

b.

c.

**Fig.4.3**

**Linia de influență a reacțiunii $V_2$ pentru o grindă simplu rezemată**
a. - grinda simplu rezemată,
b. - mecanismul, c - linia de influență a reacțiunii $V_2$

**Influence line for the reaction $V_2$ of a simply supported beam**
a. - simply supported beam,
b. - mechanism, c. - influence line for reaction $V_2$

Ecuația de echilibru prin lucru mecanic virtual este:

The equilibrium equation using the virtual work is :

$$-V_2 \cdot \delta_2 + 1 \cdot \delta_x = 0 \qquad \text{de unde / resulting in:} \qquad V_2 = \frac{1 \cdot \delta_x}{\delta_2}$$

Deci semnul liniei de influență pentru $V_2$ este plus.

Thus the sign of the influence line for $V_2$ is plus.

Pentru ca ordonatele $\delta_x$ ale diagramei deplasărilor să fie valorile reacțiunii $V_2$ (deci pentru $\delta_x = V_2 = v_{2x}$), este necesar ca:

$$\delta_2 = 1$$

In order for the ordinates $\delta_x$ of the displacement diagram to become the values of the reaction $V_2$ (thus for $\delta_x = V_2 = v_{2x}$), it is necessary to set:

condiție care dă scara liniei de influență, celelalte ordonate rezultând printr-un calcul simplu.

condition which gives the scale of the influence line, the other ordinates in the diagram resulting from simple calculations.

**E 4.2** ✍

Construirea unei linii de influență prin metoda cinematică implică stabilirea următoarelor trei elemente:

- **forma,** care este dată de diagrama deplasărilor după direcția verticală a mecanismului obținut eliminând legătura corespunzătoare reacțiunii sau efortului $S_i$ propus;
- **semnele** liniei de influență;
- **scara** liniei de influență.

Ultimele două elemente rezultă scriind ecuația de lucru mecanic virtual produs de $S_i$ şi forța $F = 1$.

In general, metoda cinematică este mai simplă decât metoda analitică. De aceea se va utiliza mai departe numai această metodă.

The following three elements need to be determined in order to construct the influence line by the kinematic method:

- **the shape,** which is given by the displacement diagram in the vertical direction of the mechanism obtained by releasing the connection corresponding to the reaction or internal force $S_i$;
- **the signs** of the influence line;
- **the scale** of the influence line.

The last two elements are obtained by writting the equation of virtual work produced by $S_i$ and the load $F = 1$.

Generally, the kinematic method is more simple than the analytical method. Therefore, only the kinematic method will be used in the following calculations.

## 4.2 LINII DE INFLUENTA PENTRU DIVERSE TIPURI DE STRUCTURI STATIC DETERMINATE

### 4.2.1 Grinzi simplu rezemate

**4.2.1.a Liniile de influență pentru reacțiuni** au fost analizate în par.4.1. (vezi figurile 4.2 şi 4.3).

**4.2.1.b Linia de influență pentru forța tăietoare** într-o secțiune oarecare **i**.

Eliminând legătura corespunzătoare forței tăietoare, se obține mecanismul din fig.4.4b, pentru care centrele de rotație sunt:

$(1T)$ în articulația **1**;

## 4.2 INFLUENCE LINES FOR DIFFERENT TYPES OF STATICALLY DETERMINATE STRUCTURES

### 4.2.1 Simply supported beams

**4.2.1.a The influence lines for reactions** were studied in par.4.1. (see fig.4.2 and 4.3).

**4.2.1.b The influence lines for the shear force** at a certain section **i**.

By releasing the connection corresponding to the shear force, the mechanism shown in fig.4.4.b is obtained, for which the rotation centres are:

$(1T)$ at pin support **1**;

(12) la infinit (corpurile I şi II rămân legate prin două bare paralele) şi:

(12) at infinity ( the bodies I and II remain connected by two parallel bars) and:

$$(12 \to \infty)(1T) \to \perp (2) \Rightarrow (2T)$$

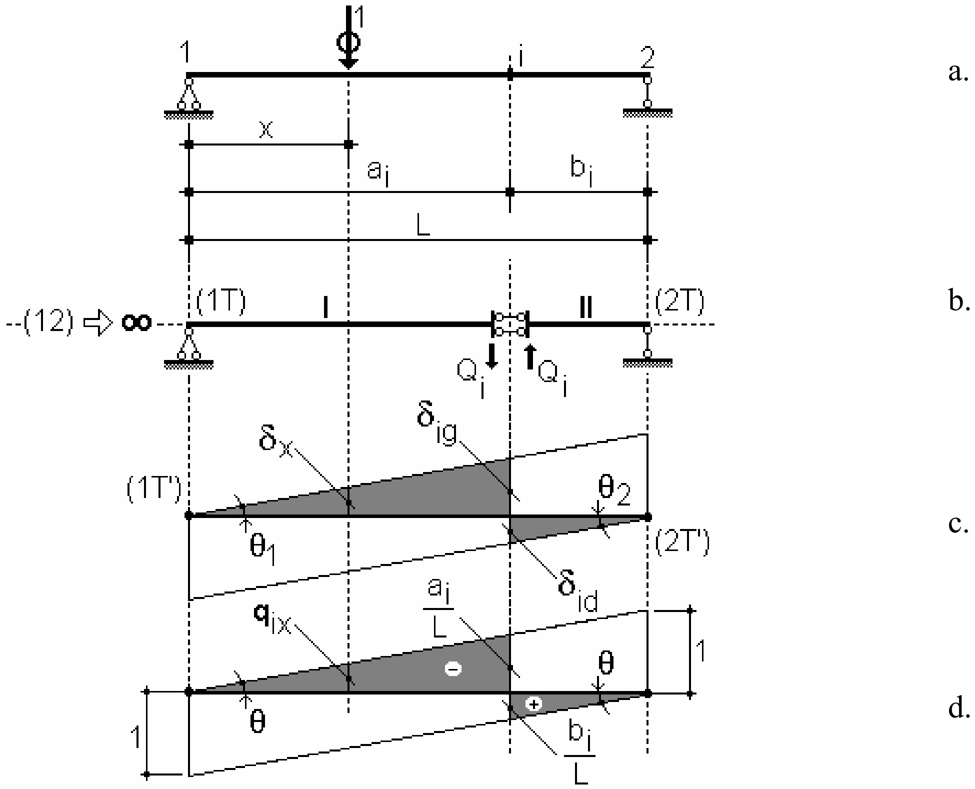



**Fig.4.4**

**Linia de influenţă a forţei tăietoare $Q_i$ pentru o grindă simplu rezematã**
a. - grinda simplu rezematã,
b. -mecanismul, c. - diagrama de deplasări virtuale, d. - linia de influenţă

**Influence line for the shear force of a simply supported beam**
a. - simply supported beam,
b. - mechanism, c. - virtual displacement diagrams, d. - influence line

Considerând deplasări de sens invers eforturilor $Q_i$, se obţine diagrama deplasărilor virtuale din fig. 4.4.c, unde $\theta_1 = \theta_2$ (deplasările corpurilor **I** şi **II** fiind paralele deoarece **(12)** este la ∞).

By considering displacements in an opposite sense to $Q_i$, one obtains the diagram of virtual displacements in fig.4.4.c, where $\theta_1 = \theta_2$ (the displacements of bodies **I** and **II** are parallel because **(12)** is at ∞).

Pentru ecuaţia de lucru mecanic virtual există două poziţii distincte ale forţei $F = 1$, la stânga şi la dreapta punctului **i**, deci:

For the equation of virtual work there are two distinct positions of the load $F = 1$ to the left and to the rigtht of the point **i,** thus:

$$-Q_i \cdot \delta_{ig} - Q_i \cdot \delta_{id} \mp 1 \cdot \delta_x = 0 \quad \text{de unde / resulting in: } Q_i = \mp \frac{1 \cdot \delta_x}{\delta_{ig} + \delta_{id}}$$

deci semnele din fig.4.4d şi condiția de scară:

thus the signs in fig.4.4.d and the scale condition:

$$\delta_x = Q_i = q_{ix} \qquad \text{pentru / for} \qquad \delta_{ig} + \delta_{id} = \delta^{rel}_{i(Q)} = 1$$

Ordonatele $\delta_{ig}$ şi $\delta_{id}$ sunt calculate în raport cu $a_i$, $b_i$, rezultând:

The coordinates $\delta_{ig}$ and $\delta_{id}$ are calculated with regard to $a_i$, $b_i$, resulting in:

$$\delta_{ig} = q^{(g)}_{ii} = \frac{a_i}{L}$$

$$\delta_{id} = q^{(d)}_{ii} = \frac{b_i}{L}$$

Celelalte ordonate rezultă din relații de proporționalitate.

The other ordinates are obtained from proportionality relationships.

### 4.2.1.c Linia de influență pentru momentul încovoietor într-o secțiune oarecare i.

### 4.2.1.c Influence line for the bending moment at a certain section i.

Eliminând legătura corespunzătoare lui $M_i$ se obține mecanismul din fig. 4.5.b, unde $(1T)$, $(12)$ sunt determinate direct şi:

By releasing the connection corresponding to $M_i$, the mechanism in fig.4.5.b is obtained, where $(1T)$, $(12)$ are determined directly and:

$$(1T)(12) \rightarrow (2T)$$

$$(12)(1T) \rightarrow \perp (2) \Rightarrow (2T)$$

Diagrama deplasărilor după direcția verticală este prezentată în fig.4.5c iar ecuația de lucru mecanic virtual este:

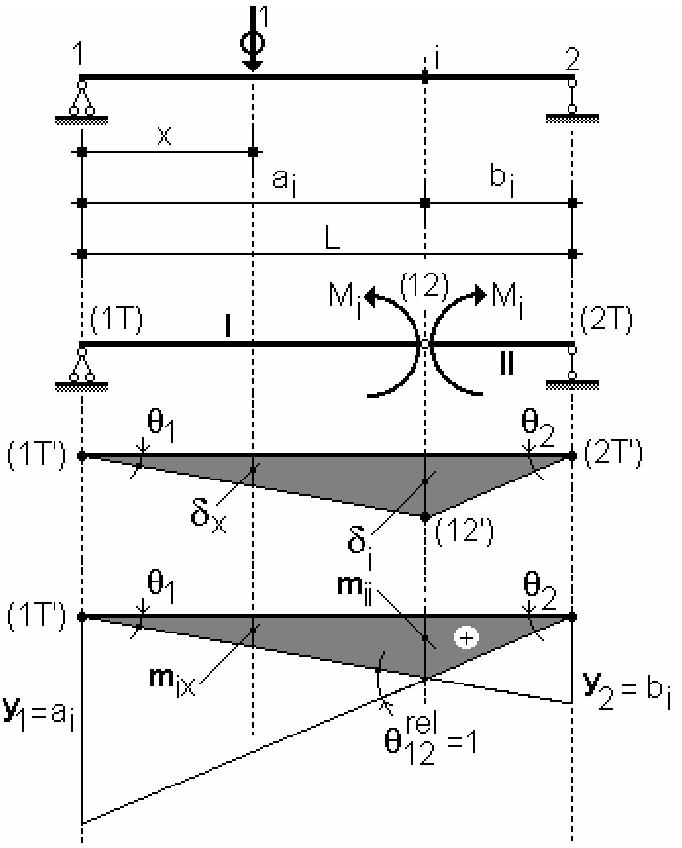
The displacement diagram in the vertical direction is shown in fig.4.5.c and the equation of virtual work is:

$$-M_i \cdot \theta_1 - M_i \cdot \theta_2 + 1 \cdot \delta_x = 0 \quad \text{de unde / resulting in: } M_i = +\frac{1 \cdot \delta_x}{\theta_1 + \theta_2}$$

Deci semnul liniei de influență este plus şi condiția de scară este:

Thus the sign of the influence line is plus and the scale condition is:

$$\delta_x = M_i \qquad \text{pentru / for} \qquad \theta_1 + \theta_2 = \theta^{rel}_{12} = 1$$




a.

b.

c.

d.

**Fig.4.5**

**Linia de influență a momentului încovoietor $M_i$ pentru o grindă simplu rezemată**
a. - grinda simplu rezemată,
b. - mecanismul, c. - diagrama deplasărilor virtuale, d. - linia de influență

**Influence line for the bending moment $M_i$ of a simply supported beam**
a. - simply supported beam,
b. - mechanism, c. - diagram of virtual displacements, d. - influence line

$\theta_{12}^{rel}$ este rotirea relativă între corpurile **I** şi **II**.

$\theta_{12}^{rel}$ is the relative rotation between bodies **I** and **II**.

In fig. 4.5.c se vede că:

Fig.4.5.c. shows that:

$$y_2 = \theta_{12}^{rel} \cdot b_i = b_i \qquad \text{deci / thus:} \qquad \theta_1 = \frac{b_i}{L}$$

$$y_1 = \theta_{12}^{rel} \cdot a_i = a_i \qquad \text{deci / thus:} \qquad \theta_2 = \frac{a_i}{L}$$

şi / and: $$\frac{m_{ii}}{a_i} = \frac{b_i}{L}$$ de unde / resulting in: $$m_{ii} = \frac{a_i \cdot b_i}{L}$$

Celelalte ordonate rezultă din relații de proporționalitate.

The other ordinates are obtained from proportionality relationships.

## 4.2.2 Grinda în consolă

### 4.2.2.a Linia de influență pentru forța tăietoare într-o secțiune oarecare **i**.

Pentru mecanismul din fig. 4.6.b, având corpul **I** fix şi centrul de rotație **(2T)** la **infinit**, se obține diagrama deplasărilor din fig. 4.6.c şi ecuația de lucru mecanic virtual:

## 4.2.2 Cantilever beam

### 4.2.2.a Influence line for the shear force at a certain section **i.**

For the mechanism in fig.4.6.b, having the body **I** fixed and the rotation centre **(2T)** at **infinity**, the displacement diagram in fig.4.6.c and the equation of virtual work are obtained:

$$-Q_i \cdot \delta_i + 1 \cdot \delta_x = 0 \qquad \text{de unde / resulting in:} \qquad Q_i = +\frac{1 \cdot \delta_x}{\delta_i}$$

care indică semnul "plus" şi dă condiția de scară:

which shows the sign "plus" and gives the scale condition:

$$\delta_x = Q_i \qquad \text{pentru / for:} \qquad \delta_i = 1$$

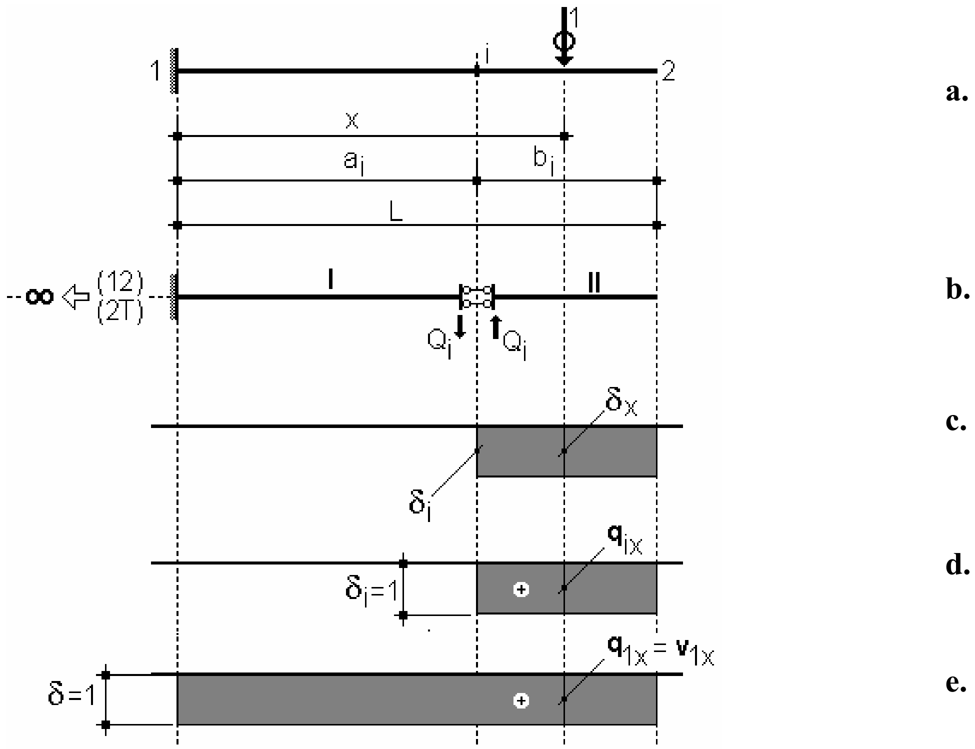



**Fig.4.6**

**Linia de influență a forței tăietoare $Q_i$ pentru o consolă**
a. - grinda în consolă, b. - mecanismul,
c. - diagrama deplasărilor virtuale,
d. - linia de influență pentru $Q_i$,
e. - linia de influență pentru $Q_1 = V_1$

**Influence line for the shear force $Q_i$ of a cantilever beam**
a. - cantilever beam, b. - mechanism,
c. - virtual displacement diagram,
d. - influence line for $Q_i$, e. - influence line for $Q_1 = V_1$

**Observație:**

Deplasând secțiunea **i** până la încastrarea **1**, se obține linia de influență pentru $Q_1 = V_1$, fig.4.6.e.

**Note:**

By moving the section **i** up to the built-in support **1**, the influence line for $Q_1 = V_1$ , fig.4.6.e, is obtained.

### 4.2.2.b Linia de influență pentru momentul încovoietor într-o secțiune oarecare i.

### 4.2.2.b Influence line for the bending moment at a certain section i.

Cu mecanismul din fig.4.7.b (corpul **I** fix şi centrul (2T) în secțiunea **i**) şi diagrama deplasărilor din fig.4.7.c, se poate scrie ecuația de lucru mecanic virtual:

With the mechanism in fig.4.7.b (the body **I** is fixed and the centre (2T) is at section **i**) and the displacement diagram in fig.4.7.c, the following equation of virtual work can be written:

$$-\mathbf{M}_i \cdot \theta_2 - 1 \cdot \delta_x = 0 \qquad \text{de unde / resulting in:} \qquad M_i = -\frac{1 \cdot \delta_x}{\theta_2}$$

deci semnul este "minus" şi condiția de scară:

thus the sign is “minus” and the scale condition:

$$\delta_x = M_i \qquad \text{pentru / for:} \qquad \theta_2 = 1$$

Ordonata maximă a liniei de influență:

The maximum ordinate of the influence line:

$$m_{i2} = b_i \cdot \theta_2 = b$$

este valoarea lui $M_i$ când $F = 1$ se găseşte în extremitatea **2** a grinzii.

represents the value of $M_i$ when $F = 1$ is acting at the end **2** of the beam.

**Observație:**

Deplasând secțiunea **i** până la încastrarea **1,** se obține linia de influență pentru $M_1$, care este reacțiunea moment, fig.4.7.e.

**Note:**

By moving the section **i** up to the fully-fixed end **1**, the influence line for $M_1$, which is the moment reaction at section i, is obtained, fig.4.7.e.

## 4.2.3 Grinzi Gerber

In fig.4.8 sunt prezentate liniile de influență pentru reacțiunea $V_B$ şi câteva eforturi ale unei grinzi Gerber, obținute prin metoda cinematică. Schema statică a grinzii Gerber este prezentată în fig.4.8.b.

## 4.2.3 Gerber beams

Fig.4.8 shows the influence lines for the reaction $V_B$ and several internal forces of a Gerber beam, obtained by the kinematic method. The static scheme of the Gerber beam is shown in fig.4.8.b.

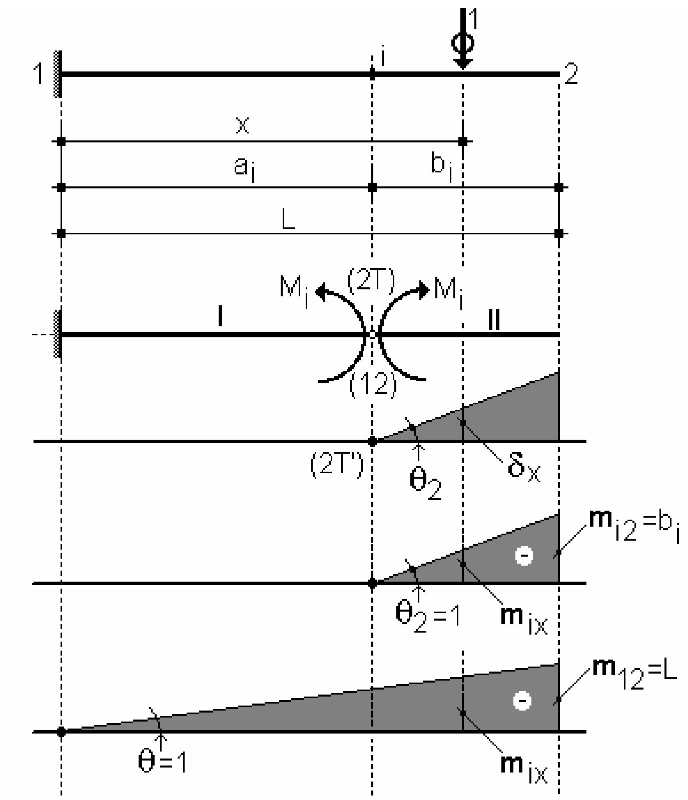



**Fig.4.7**

**Linia de influență a momentului încovoietor $M_i$ pentru o consolă**

a. - grinda în consolă, b. - mecanismul,
c. - diagrama deplasărilor virtuale,
d. - linia de influență pentru $M_i$,
e. - linia de influență pentru $M_1$

**Influence line for the bending moment $M_i$ of a cantilever beam**

a. - cantilever beam, b. - mechanism,
c. - virtual displacement diagram,
d. - influence line for $M_i$,
e. - influence line for $M_1$

Considerând principiile generale cunoscute, se scriu numai ecuațiile de lucru mecanic virtual care dau semnele şi scara liniei de influență.

By considering the known general principles, only the equations of virtual work which provide the signs and the scale of the influence line are written.

Ordonatele caracteristice ale liniilor de influență au fost calculate plecând de la scara liniei de influență şi prin relații de proporționalitate. Deci:

The characteristic ordinates of the influence lines were calculated using the scale of the influence line and the proportionality relationships. Thus:

- **linia de influență pentru reacțiunea** $V_2$ **(**fig.4.8.c,d):

- **influence line for the reaction** $V_2$ ( fig.4.8.c,d):

$$-V_2 \cdot \delta_2 \pm 1 \cdot \delta_x = 0 \qquad \text{de unde / resulting in:} \qquad V_2 = \pm \frac{1 \cdot \delta_x}{\delta_2}$$

şi: / and:

$\delta_x = V_2$ pentru / for $\delta_2 = 1$

- **linia de influență pentru momentul încovoietor** $M_2$ (fig.4.8.e):
- **influence line for the bending moment** $M_2$ (fig.4.8.e):

$-M_2 \cdot \theta_2 \mp 1 \cdot \delta_x = 0$ de unde / resulting in: $M_2 = \mp \frac{1 \cdot \delta_x}{\theta_2}$

şi: / and:

$\delta_x = M_2$ pentru / for $\theta_2 = 1$

- **linia de influență pentru forța tăietoare** $Q_A$ (fig.4.8. f):
- **influence line for the shear force** $Q_A$ (fig.4.8. f):

$-Q_A \cdot \delta_1 - Q_A \cdot \delta_2 \mp 1 \cdot \delta_x = 0$ de unde / resulting in: $Q_A = \mp \frac{1 \cdot \delta_x}{\delta_1 + \delta_2}$

şi: / and:

$\delta_x = Q_A$ pentru / for $\delta_1 + \delta_2 = \delta_A^{(rel)} = 1$

- **linia de influență pentru momentul încovoietor** $M_A$ (fig.4.8.g):
- **influence line for the bending moment** $M_A$ (fig.4.8.g):

$-M_A \cdot \theta_1 - M_A \cdot \theta_2 \mp 1 \cdot \delta_x = 0$ de unde / resulting in: $M_A = \mp \frac{1 \cdot \delta_x}{\theta_1 + \theta_2}$

şi: / and:

$\delta_x = M_A$ pentru / for $\theta_1 + \theta_2 = \theta_{12}^{(rel)} = 1$

**Observație:**

Schema statică din fig.4.8.b justifică faptul că liniile de influență pentru eforturile unui sistem principal ($Q_A$, $M_A$) au ordonate diferite de zero pentru F=1 pe sistemul respectiv şi pe sistemele secundare aferente, în timp ce pentru sistemul secundar $S_2$ liniile de influență au ordonate diferite de zero numai pentru F=1 pe sistemul respectiv.

**Note:**

The static scheme in fig.4.8.b justifies that the influence lines for the internal forces of a main system ($Q_A$, $M_A$) have ordinates different from zero for F=1 acting on that system and the corresponding secondary systems, while the influence lines of the secondary system $S_2$ have ordinates different from zero only for F=1 acting on that system.

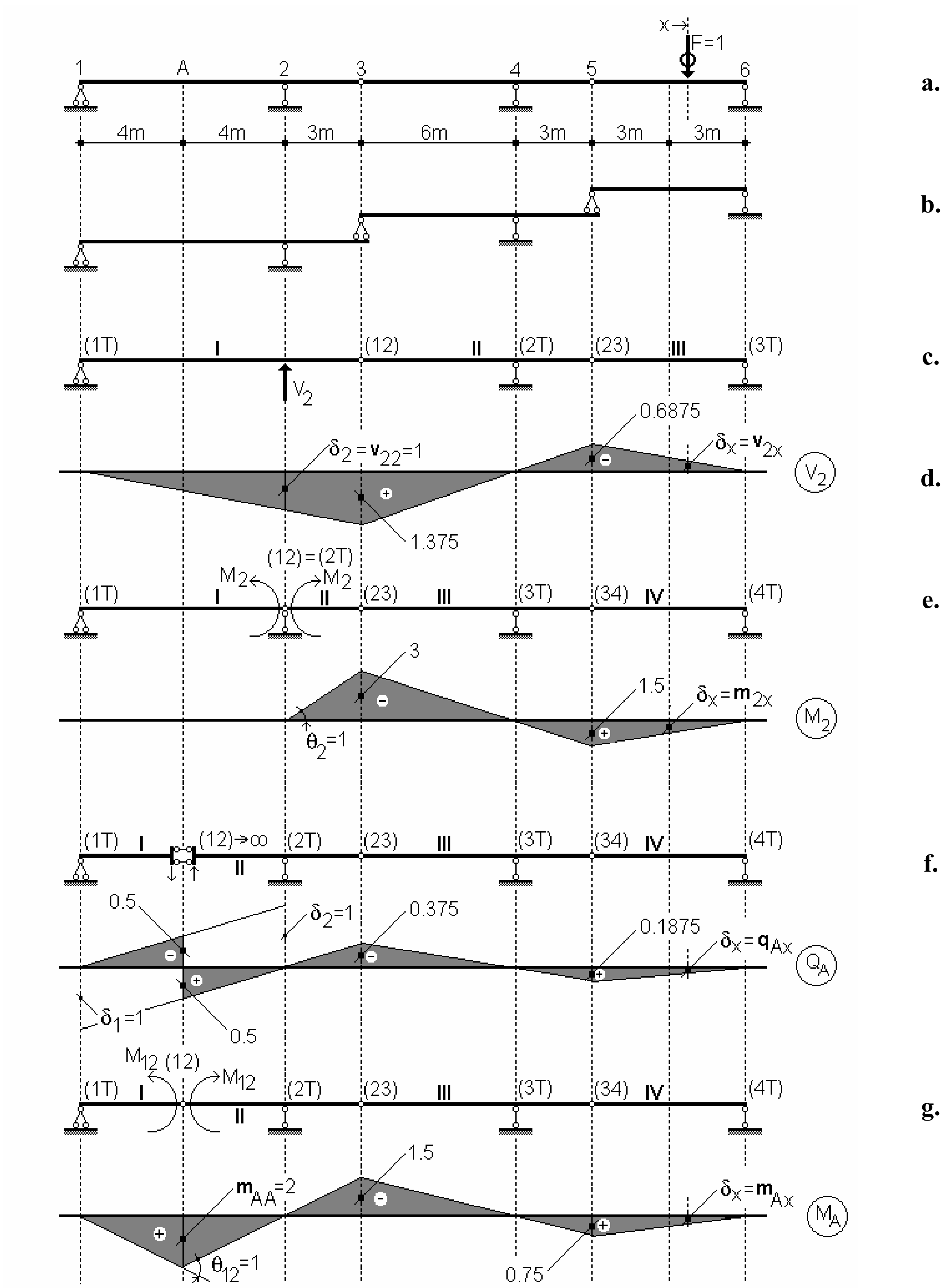



**Fig.4.8**

**Linii de influență pentru o grindă Gerber.**
a. - grinda Gerber, b. - schema statică,
c. - mecamismul, d. - reacțiunea, e. şi g. -
momentul încovoietor, f. - forța tăietoare

**Influence lines of a Gerber beam.**
a. - Gerber beam, b. - static scheme,
c. - mechanism, d. - reaction, e. and
g. - bending moment, f. - shear force

## 4.2.4 Cadre

Se dă ca exemplu cadrul din fig.4.9.a, având linia de încărcare 3-4-5-6. Se prezintă câteva linii de influență obținute prin metoda cinematică și pentru fiecare din ele este indicată condiția de scară:

## 4.2.4 Frames

Consider as example the frame in fig.4.9.a, having the loading line 3-4-5-6. Several influence lines obtained by the kinematic method are presented next and the scale condition is shown for each one of them:

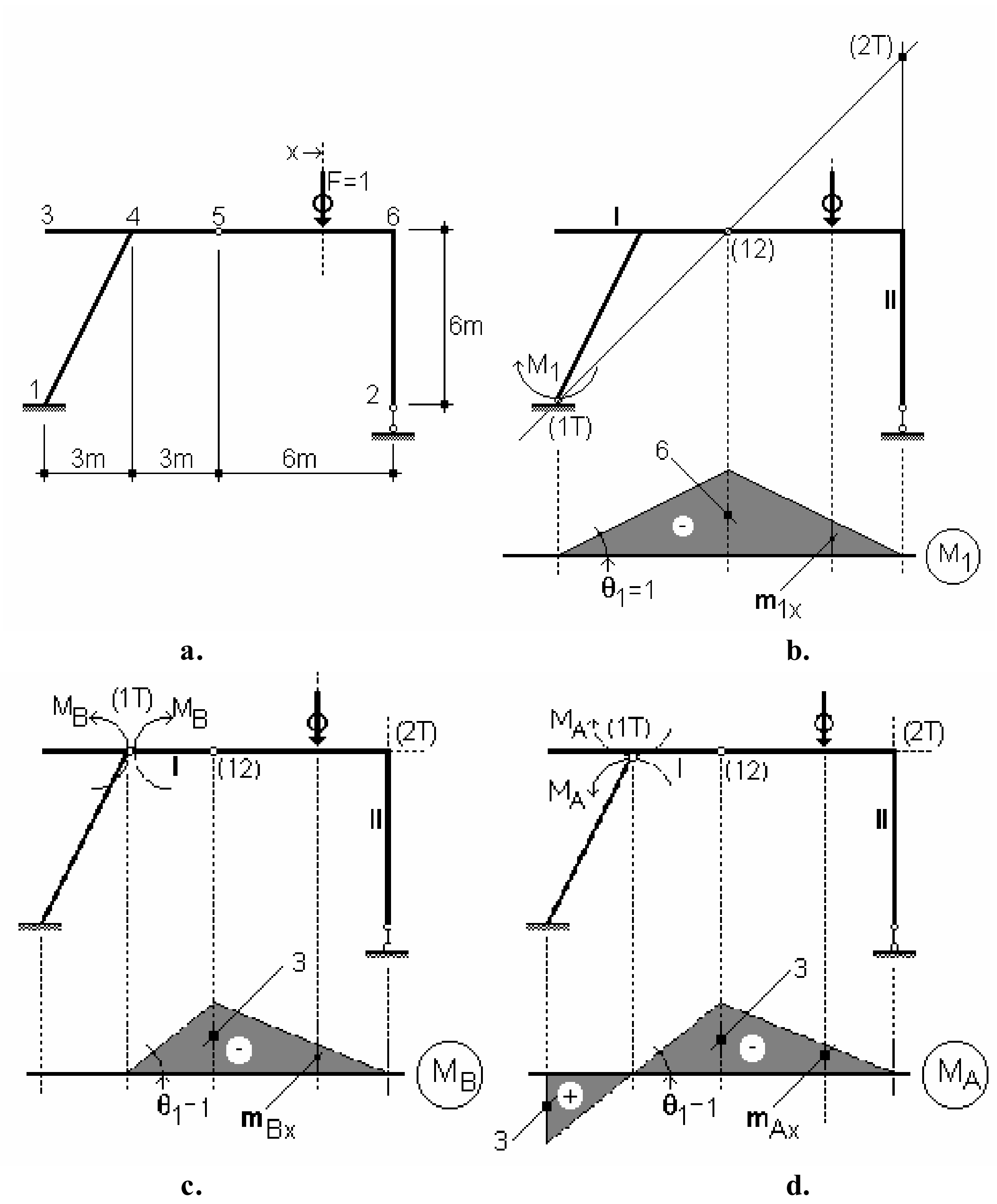


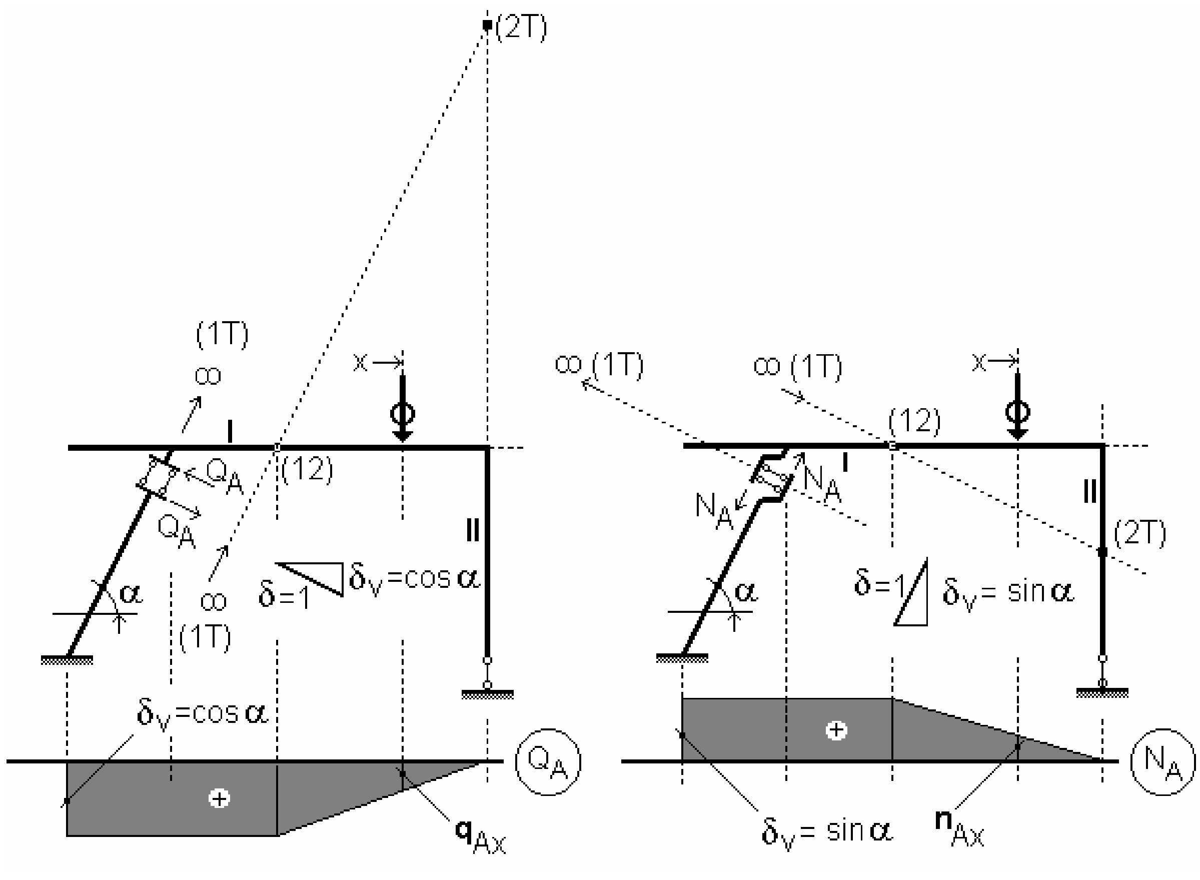

**Fig.4.9**

**Linii de influență pentru momente încovoietoare la un cadru.**

**Influence lines for the bending moments of a frame.**

$\theta_1 = 1$ pentru momentul încovoietor $M_1$ / for the bending moment $M_1$ (fig.4.9.b.);

$\theta_1 = 1$ pentru momentele încovoietoare $M_B, M_A$ / for the bending moments $M_B, M_A$ (fig.4.9.c,d).




**a.** **b.**

**Fig.4.10**

**Liniile de influență pentru cadrul din fig.4.9.a.**
a. - forța tăietoare, b. - forța axială

**Influence lines for the frame in fig.4.9.a.**
a. - shear force, b. - axial force

$\delta = 1$ $(\delta_V = \cos\alpha)$ pentru forța tăietoare $Q_A$ / for the shear force $Q_A$ (fig.4.10.a);

$\delta = 1$ $(\delta_V = \sin\alpha)$ pentru forța axială $N_A$ / for the axial force $N_A$ (fig4.10.b).

Plecând de la aceste condiții de scară, au fost calculate ordonatele caracteristice liniilor de influență.

Using these scale conditions, the characteristic ordinates of the influence lines were calculated.

## 4.2.4 Arce

Pentru arcul cu trei articulații din fig.4.11. şi fig.4.12, sunt prezentate trei linii de influență.

- **linia de influență pentru reacțiunea** $V_1$

Pentru mecanismul din fig.4.11.b, având centrele absolute de rotație (1,T), (2,T) în articulația **2**, se obține diagrama deplasărilor din fig.4.11.c şi ecuația de lucru mecanic virtual:

## 4.2.4 Arches

Three influence lines are presented for the three-pinned arch shown in fig.4.11. and fig.4.12.

- **influence line for the reaction** $V_1$

For the mechanism shown in fig.4.11.b, having the absolute rotation centres (1,T), (2,T) at pin support **2,** the displacement diagram in fig.4.11.c and the equation of virtual work are obtained:

$$-V_1 \cdot \delta_1 + 1 \cdot \delta_x = 0 \qquad \text{de unde / resulting in:} \qquad V_1 = +\frac{1 \cdot \delta_x}{\delta_1}$$

deci condiția de scară este: / thus, the scale condition is:

$$\delta_x = V_1 \qquad \text{pentru / for:} \qquad \delta_1 = v_{11} = 1$$

- **linia de influență pentru reacțiunea** $H_1$

Pentru mecanismul din fig.4.11.d şi diagrama deplasărilor din fig.4.11.e, ecuația de lucru mecanic virtual este următoarea:

- **influence line for the reaction** $H_1$

For the mechanism in fig.4.11.d and the displacement diagram in fig.4.11.e, the equation of virtual work is the following:

$$-H_1 \cdot \delta_1^{(H)} + 1 \cdot \delta_x = 0 \qquad \text{de unde / resulting in:} \qquad H_1 = +\frac{1 \cdot \delta_x}{\delta_1^{(H)}}$$

deci condiția de scară este: / thus, the scale condition is:

$$\delta_x = H_1 = v_{1x} \qquad \text{pentru / for} \qquad \delta_1^{(H)} = 1$$

$\delta_1^{(H)}$ este deplasarea pe orizontală a secțiunii **1** şi se poate scrie:

$\delta_1^{(H)}$ is the horizontal displacement at section **1**. One can write:

$$\delta_1^{(H)} = y_{1T} \cdot \theta_1 = 1 \qquad \text{deci / thus} \qquad \theta_1 = \frac{1}{y_{1T}}$$

$$\text{dar/but:} \qquad \frac{y_{1T}}{L} = \frac{f}{L/2} \qquad \text{de unde / resulting in} \qquad \frac{1}{y_{1T}} = \frac{1}{2f}$$

şi ordonata maximă este / and the maximum ordinate is $\delta_3 = \theta_1 \cdot \frac{L}{2} = \frac{L}{4f}$

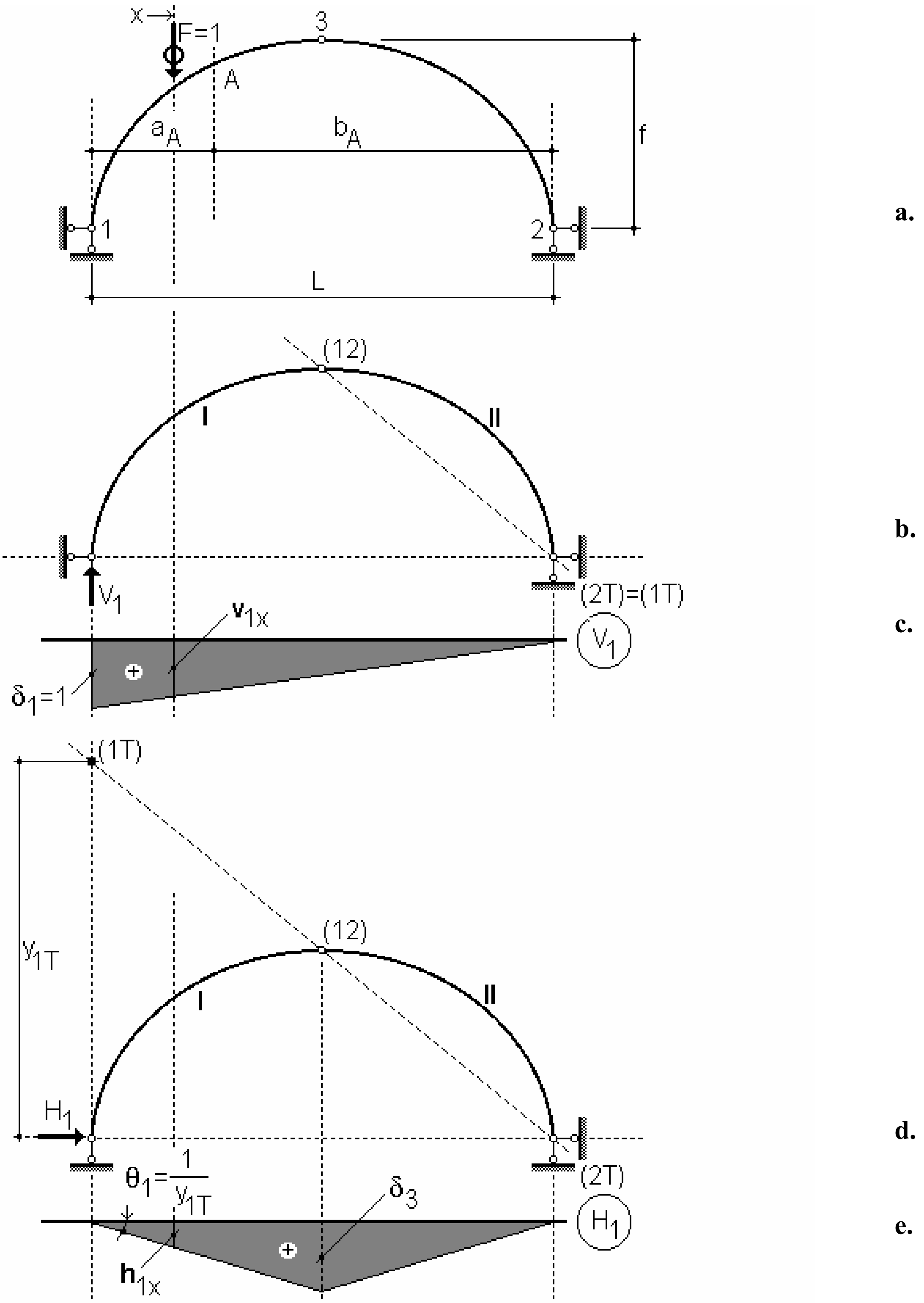



**Fig.4.11**

**Linii de influență pentru reacțiuni la un arc cu trei articulații.**

a. - arcul, b. şi d. - mecanismele,

c. şi e. - liniile de influență pentru $V_1$ şi $H_1$

**Influence lines for reactions of a three-pined arch**

a. - arch, b. and d. - mechanisms,

c. and e. - influence lines for $V_1$ and $H_1$

- **linia de influenţă pentru momentul încovoietor** $M_A$ dintr-o secţiune oarecare **A**, fig.4.12:

- **influence line for the bending moment** $M_A$ at a certain section **A**, fig.4.12:

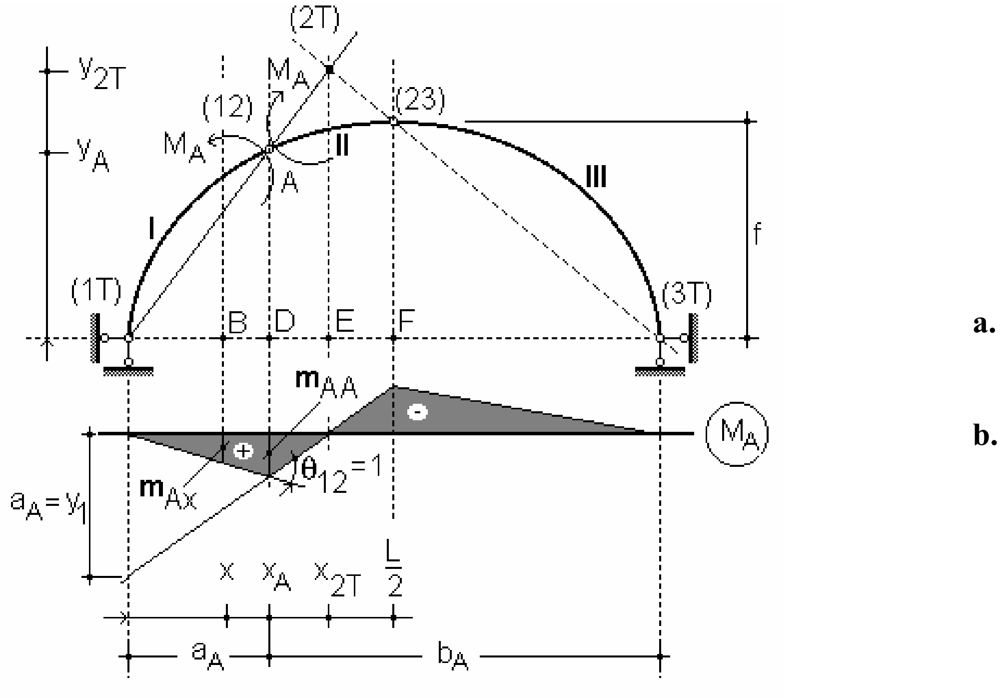



**Fig.4.12**

**Linia de influenţă pentru momentul încovoietor** $M_A$ **al arcului cu trei articulaţii din fig.4.11.a.**
a. - mecanismul, b. - linia de influenţă pentru $M_A$

**Influence line for the bending moment** $M_A$ **of the three-pinned arch in fig.4.11.a.**
a. - mechanism, b. - influence line for $M_A$

Pentru mecanismul din fig.4.12.a, se obţine diagrama deplasărilor din fig.4.12.b şi se poate scrie ecuaţia de lucru mecanic virtual:

For the mechanism in fig.4.12.a, the displacement diagram in fig.4.12.b is obtained. The equation of virtual work is:

$$-M_A \cdot \theta_1 - M_A \cdot \theta_2 \pm 1 \cdot \delta_x = 0$$

de unde / resulting in:

$$M_A = \pm \frac{1 \cdot \delta_x}{\theta_1 + \theta_2}$$

şi / and: $\delta_x = M_A = m_{Ax}$ pentru / for $\theta_1 + \theta_2 = \theta_{12}^{(rel)} = 1$

ceea ce dă ordonata pe reazemul **1**:

which result in the ordinate at support **1**:

$$y_1 = \theta_{12} \cdot a_A = a_A$$

Pentru a stabili ordonatele liniei de influență, trebuie să se determine poziția centrului **(2T)**, fig.4.12.a., astfel:

In order to determine the ordinates of the influence line, the position of the center **(2T)** has to be identified, fig.4.12.a., as follows:

$$\Delta(1T)(2T)E \approx \Delta(1T)(12)D \Rightarrow \quad \frac{y_{2T}}{y_A} = \frac{x_{2T}}{a_A}$$

de unde / resulting in:

$$y_{2T} = \frac{x_{2T} \cdot y_A}{a_A}$$

$$\Delta(3T)(2T)E \approx \Delta(3T)(23)F \Rightarrow \quad \frac{y_{2T}}{f} = \frac{L - x_{2T}}{\frac{L}{2}}$$

deci:

thus:

$$\frac{x_{2T} \cdot y_A}{a_A} = \frac{2 \cdot (L - x_{2T}) \cdot f}{L}$$

de unde / resulting in:

$$x_{2T} = \frac{2 \cdot (L - x_{2T}) \cdot f \cdot a_A}{L \cdot y_A}$$

şi apoi:

and then:

$$\frac{m_{AA}}{x_{2T} - a_A} = \frac{y_1}{x_{2T}}$$

sau / or:

$$\frac{m_{AA}}{x_{2T} - a_A} = \frac{a_A}{x_{2T}}$$

şi rezultă:

resulting in:

$$m_{AA} = \frac{a_A (x_{2T} - a_A)}{x_{2T}}$$

şi / and

$$m_{Ax} = \frac{m_{AA}}{a_A} \cdot x$$

## 4.2.5 Structuri cu zăbrele

In fig.4.13 sunt prezentate liniile de influență pentru forțele axiale ale câtorva bare ale unei grinzi cu zăbrele simple, obținute prin metoda cinematică.

Pentru a respecta ipoteza că încărcările sunt aplicate numai în noduri, se consideră că F=1 acționează indirect, pe elementele simplu rezemate în noduri, fig.4.13.a.

## 4.2.5 Trusses

Fig.4.13 shows the influence lines for the axial forces in certain bars of a simple truss, obtained by the kinematic method.

In order to satisfy the assumption that the loads are applied only to the joints, the load F=1 is considered acting indirectly on members simply supported at the joints, fig.4.13.a.

Cu mecanismul din fig.4.13.b şi diagrama deplasărilor din fig.4.13.c,se poate scrie:

By using the mechanism in fig.4.13.b and the displacement diagram in fig.4.13.c, one can write:

$$-N_{78}\cdot d_7^{(N)}-N_{87}\cdot d_8^{(N)}-1\cdot\delta_x=0 \quad \text{de unde / resulting in:} \quad N_{78}=-\frac{1\cdot\delta_x}{\delta_7^{(N)}+\delta_8^{(N)}}$$

deci condiția de scară este:

thus, the scale condition is:

$$\delta_7^{(N)}+\delta_8^{(N)}=\delta_{78}^{rel(N)}=1$$

Deplasarea relativă $\delta_{78}^{rel(N)}$ poate fi scrisă:

The relative displacement $\delta_{78}^{rel(N)}$ can be written as :

$$\delta_{78}^{rel(N)}=\theta_{12}^{rel}\cdot h=1 \quad \text{de unde / resulting in:} \quad \theta_{12}^{rel}=\frac{1}{h}$$

Ordonatele pe reazeme sunt:

The ordinates at supports:

$$y_1=y_2=\theta_{12}^{rel}\cdot 2a=\frac{2a}{h}$$

- **linia de influență pentru forța axială** $N_{37}$

- **influence line for the axial force** $N_{37}$

Pentru mecanismul din fig.4.13.d şi diagrama deplasărilor din fig.4.13.e, ecuația de lucru mecanic virtual este:

For the mechanism in fig.4.13.d and the displacement diagram in fig.4.13.e, the equation of virtual work is:

$$-N_{37}\cdot\delta_3^{(N)}-N_{73}\cdot\delta_7^{(N)}\mp 1\cdot\delta_x=0 \quad \text{de unde / resulting in:} \quad N_{37}=\mp\frac{1\cdot\delta_x}{\delta_3^{(N)}+\delta_7^{(N)}}$$

deci condiția de scară este:

thus, the scale condition is:

$$\delta_3^{(N)}+\delta_7^{(N)}=\delta_{37}^{rel(N)}=1$$

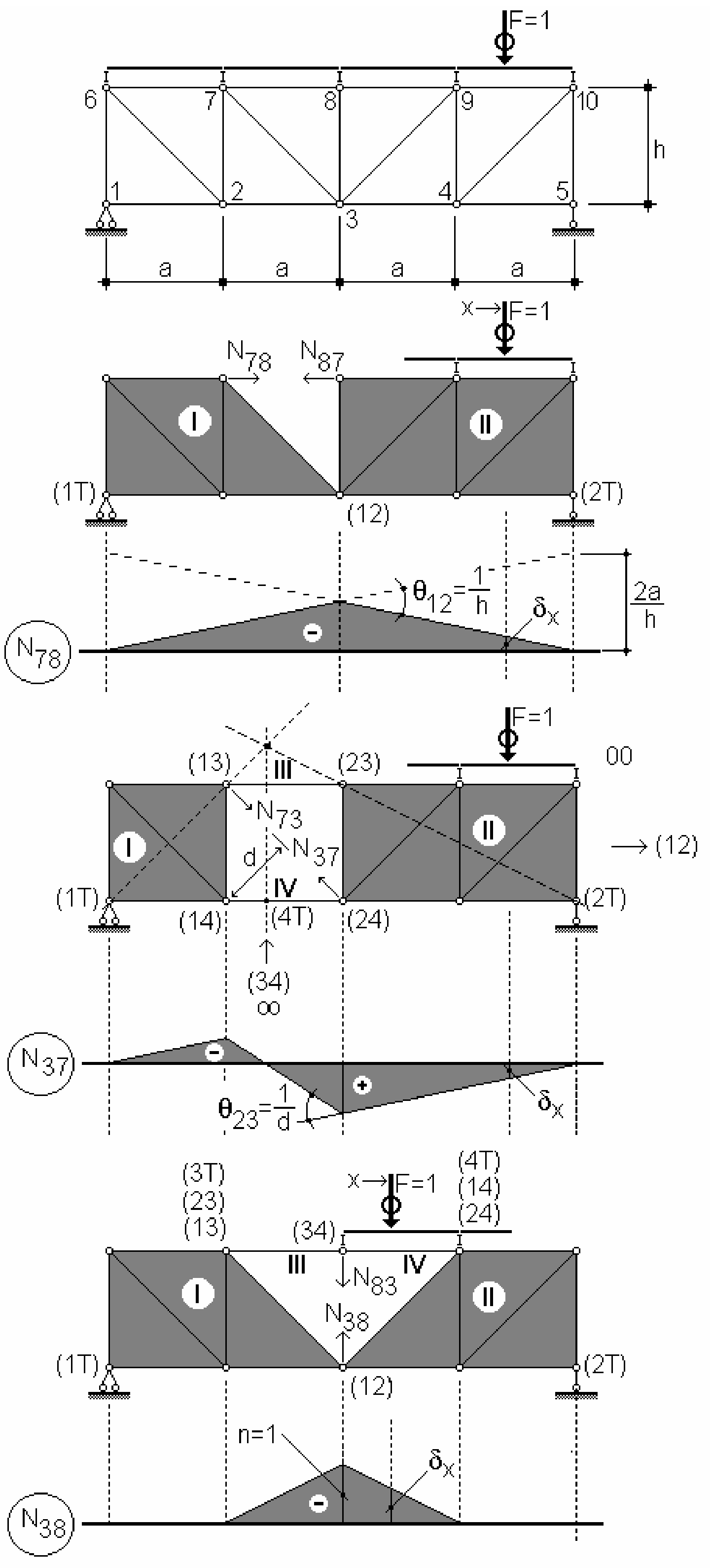
şi se poate scrie:

and one can write:

$$\delta_{37}^{rel(N)}=\theta_{23}^{rel}\cdot d=1 \quad \text{de unde / resulting in:} \quad \theta_{23}^{rel}=\frac{1}{d}$$

- **linia de influență pentru forța axială** $N_{83}$

- **influence line for the axial force** $N_{83}$




a.

b.

c.

d.

e.

f.

g.

**Fig.4.13**

**Linii de influență pentru o grindă cu zăbrele**

a. - grinda cu zăbrele,
b., d. şi f. -mecanismele, c., e. şi g. - liniile de influență

**Influence lines for a truss**

a. -truss, b., d. and f. - mechanisms,
c., e. and g. - influence lines

Centrele de rotație se determină astfel:

The rotation centres are determined as follows :

(1T), (12), (13), (34), (24) - direct / directly,

$$\left.\begin{array}{l}(1T)(12) \rightarrow (2T)\\ \perp \text{ dèpl. B} \rightarrow (2T)\end{array}\right\} \Rightarrow (2T)$$

$$\left.\begin{array}{l}(12)(13) \rightarrow (23)\\ (24)(34) \rightarrow (23)\end{array}\right\} \Rightarrow (23)$$

$$\left.\begin{array}{l}(12)(24) \rightarrow (14)\\ (13)(34) \rightarrow (14)\end{array}\right\} \Rightarrow (14)$$

$$\left.\begin{array}{l}(1T)(13) \rightarrow (3T)\\ (2T)(23) \rightarrow (3T)\end{array}\right\} \Rightarrow (3T)$$

$$\left.\begin{array}{l}(2T)(24) \rightarrow (4T)\\ (1T)(14) \rightarrow (4T)\end{array}\right\} \Rightarrow (4T)$$

Rezultă astfel că I şi II sunt corpuri fixe (pe fiecare din ele există două centre absolute) şi se obține diagrama din fig.4.13.g şi ecuația de lucru mecanic virtual:

The result is that the bodies I and II are fixed bodies (each of them has two absolute centres), leading to the diagram in fig.4.13.g. The equation of virtual work is:

$$-N_{83} \cdot \delta_8^{(v)} - 1 \cdot \delta_x = 0 \qquad \text{de unde / resulting in:} \qquad N_{83} = -\frac{1 \cdot \delta_x}{\delta_8^{(v)}}$$

are condiția de scară / has the scale condition: $\delta_8^{(v)} = 1$

**Observație:**

Pentru F=1 pe talpa inferioară (calea inferioară), linia de influență este în totalitate nulă, deci efortul $N_{38} = 0$ pentru orice încărcare pe talpa inferioară.

**Note:**

For F=1 acting on the bottom chord, the influence line is entirely zero. Consequently, the axial force $N_{38} = 0$ for any load acting on the bottom chord.

## 4.3 REACTIUNI SI EFORTURI MAXIME PRODUSE DE INCARCARI MOBILE

## 4.3 REACTIONS AND INTERNAL FORCES PRODUCED BY MOVING LOADS

După trasarea liniei de influență a unei **mărimi statice** $S_i$, determinarea valorii maxime (sau a valorilor maxime) a lui $S_i$ produsă de acțiunea unui convoi de încărcări se face prin încercări, utilizând încărcările echivalente sau printr-un calcul analitic.

After the construction of the influence line of a **static quantity** $S_i$, the calculation of the maximum value (or maxima values) of $S_i$ produced by a train of loads is carried out by trials, using the equivalent loads or by analytical calculations.

## 4.3.1. Prin încercări

Se ştie că utilizând coeficienții de influență $s_{ij}$, $S_i$ poate fi scris prin suprapunerea efectelor, fig.4.1, conform relației (4.2) care arată că, pentru a obține o valoare cât mai mare, trebuie ca:

- încărcările mari să fie în dreptul ordonatelor mari ale liniei de influență;
- o încărcare să fie întotdeauna în dreptul ordonatei maxime a liniei de influență.

Aceste reguli permit, prin câteva încercări, să se determine poziția cea mai defavorabilă a convoiului de încărcări (care conduce la valoarea maximă a lui $S_i$).

**Observație:**

Trebuie precizat că în cazul în care linia de influență are zone cu **semnul plus** şi cu s**emnul minus**, este necesar să se calculeze o valoare maximă pozitivă şi o valoare maximă negativă (denumită valoare minimă) pentru aceeaşi mărime statică $S_i$.

## 4.3.1. By trials

It is known that by using the coefficients of the influence line $s_{ij}$, $S_i$ can be written by the superposition of the effects, fig.4.1, according to the relationship (4.2). In order to get a value as large as possible for $S_i$ :

- the large loads must act at sections with large ordinates of the influence line;
- a load must always be at the section where the ordinate of the influence line is a maximum.

These rules allow, by a few trials, to determine the most unfavourable position of the train of loads (which leads to the maximum value of $S_i$).

**Note:**

It has to be mentioned that in the case when the influence line has regions with the **plus** and **minus sign**, it is necessary to calculate a positive maximum value and a negative maximum value (called minimum value) for the same static quantity $S_i$.

## 4.3.2. Utilizând încărcările "echivalente"

Utilizând încărcările "echivalente", uniform distribuite, care sunt date în normele de calcul, fig.4.14, rezultă:

## 4.3.2. By using the “equivalent” loads

By using the uniformely distributed “equivalent” loads given in the codes of practice, fig.4.14, one obtains:

$$S_{i(+)}^{max} = q_1 \cdot A_{(+)} = q_1 \cdot \frac{L_1 \cdot s_{i1}}{2} \qquad \textbf{(4.5)}$$

$$S_{i(-)}^{max} = S_i^{min} = -q_2 \cdot A_{(-)} = -q_2 \cdot \frac{L_2 \cdot s_{i2}}{2} \qquad \textbf{(4.6)}$$

$A_{(+)}$ şi $A_{(-)}$ sunt aria zonei pozitive şi respectiv a zonei negative a liniei de influență.

$A_{(+)}$ and $A_{(-)}$ are the areas of the positive region and negative region, respectively, of the influence line.

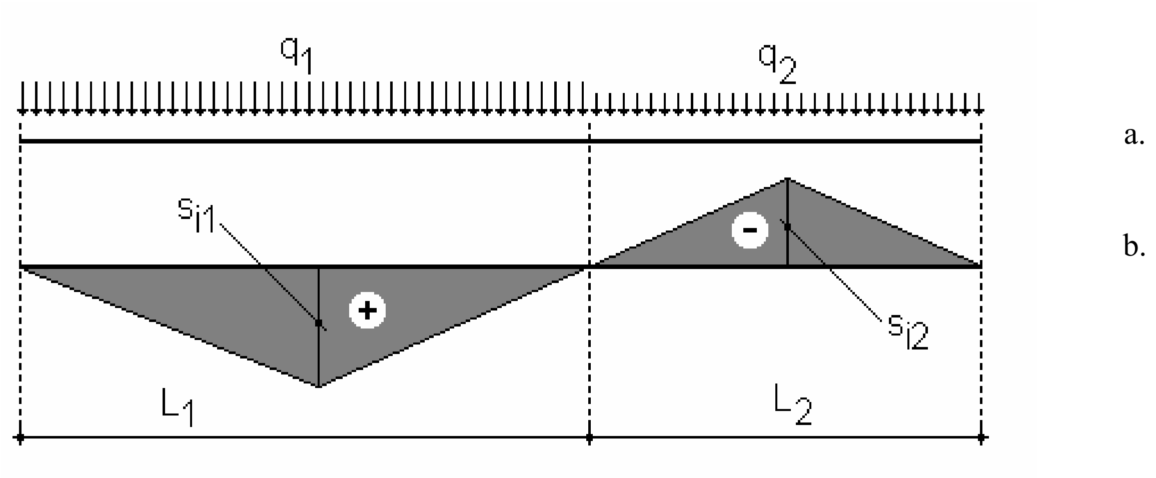



**Fig.4.14**

**Incărcări echivalente.**
a. - încărcările echivalente, b. - linia de influență

**Equivalent loads.**
a. - equivalent loads, b. - influence line

## 4.3.3. Prin calcul analitic

Calculul analitic conduce la anumite criterii ce permit determinarea pozițiilor celor mai defavorabile ale convoiului de incărcări pentru efortul studiat, după cum se va vedea în paragraful următor pentru o grindă simplu rezemată.

### 4.3.3.a. Forța tăietoare maximă

Se consideră grinda simplu rezemată din fig.4.15. şi o secțiune oarecare i.

Pentru o poziție oarecare a convoiului de încărcări mobile pe grindă, fig.4.14.a, utilizând ordonatele liniei de influență, fig.4.14.b, se poate scrie următoarea relație prin suprapunerea efectelor:

## 4.3.3. By analytical calculations

The analytical calculations lead to certain criteria to determine the most unfavourable position of the the train of loads for the internal force sought, as it will be shown in the next paragraph for a simply supported beam.

### 4.3.3.a. Maximum shear force

Consider the simply supported beam in fig.4.15. and a certain section i.

For a certain position of the train of loads acting on the beam, fig.4.14.a and using the coordinates of the influence line, fig.4.14.b, the following relationship can be written using the superposition of effects:

$$Q_i = q_{i1} \cdot F_1 + q_{i2} \cdot F_2 + ... + q_{in} \cdot F_n = \sum_{j=1}^{n} q_{ij} \cdot F_j \qquad \textbf{(4.7)}$$

relație care arată că, pentru a obține efortul $Q_i$ cât mai mare, trebuie ca:

- să se încarce prima dată numai zona cu ordonatele mai mari (în cazul nostru, zona pozitivă);
- pentru fiecare încercare, o forță să fie în dreptul secțiunii **i**.

relationship which shows that, in order to obtain the shear force $Q_i$ as large as possible, one has:

- to load firstly only the region with larger ordinates (in our case, the positive zone);
- for each trial, one force must act at the section **i**.

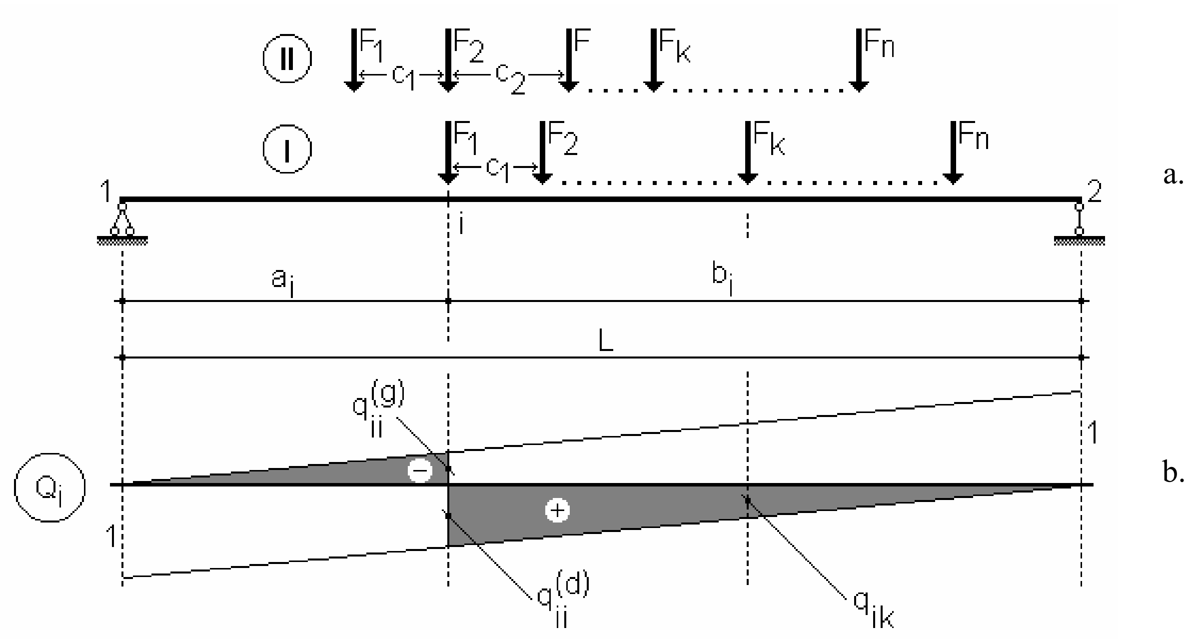



**Fig.4.14**

**Forța tăietoare maximă într-o secțiune "i".**
a. - încărcarea, b. - linia de influență

**Maximum shear force at a section "i".**
a. - load, b. - influence line

Practic (fără a prezenta demonstrația, foarte simplă, de altfel) se procedează astfel:

- pentru poziția ( **I** ) - $F_1$ în secțiunea **i**, fig.4.14.a, se calculează raporturile:

Practically (without showing the demonstration, which is very simple), one has:

- for position ( **I** ) - $F_1$ at section **i,** fig.4.14.a, the following ratios are calculated:

$$\frac{F_1}{c_i} \quad \text{și / and} \quad \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{L} \quad \text{dacă / if} \quad \frac{F_1}{c_i} \rangle \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{L}$$

poziția ( **I** ) este poziția de forță tăietoare maximă;

position ( **I** ) is the position for the maximum shear force;

- dacă:

- if:

$$\frac{F_1}{c_1} \langle \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{L}$$

convoiul încărcării se consideră deplasat în poziția ( **II** ) - $F_2$ în secțiunea **i**, fig.4.14.a şi se calculează raporturile:

the train of loads is moved to position ( **II** ) - $F_2$ at section **i,** fig.4.14.a and one calculates the ratios:

$$\frac{F_2}{c_2} \quad \text{and} \quad \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{L}$$

pentru a compara valorile lor.

in order to compare their values.

- se efectuează astfel de încercări până când se obține:

- the trials are carried out until one obtains:

$$\frac{F_j}{c_j} \rangle \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k}{L} \qquad \textbf{(4.8)}$$

relație care indică faptul că poziția convoiului de încărcări cu $F_j$ în secțiunea **i** produce **forța tăietoare maximă**, care se calculează astfel:

relationship which shows that the position of the train of loads with $F_j$ at section **i** produces **the maximum shear force**, which is calculated as follows:

$$Q_i^{max} = \pm \sum_{k=1}^{n} q_{ik} \cdot F_k \qquad \textbf{(4.9)}$$

sau, ca pentru încărcări fixe :

or, as for fixed loads:

$$Q_i^{max} = V_1 - \sum_{k=1}^{j-1} F_k \qquad \textbf{(4.10)}$$

**Observație:**

Este necesar ca prin deplasările convoiului de încărcări pe grindă, structura acestuia să rămână aceeaşi ($F_1$, $F_2$... $F_n$), dar se poate utiliza o metodă grafică prin care restricția anterioară este eliminată.

**Note:**

The structure of the train of loads has to remain the same ($F_1$, $F_2$... $F_n$) when moving across the beam but a graphical method can be used in order to eliminate this restriction.

### 4.3.3.b Momentul încovoietor maxim

Pentru o poziție oarecare a convoiului de încărcări mobile pe grindă, fig.4.15.a, cu ordonatele liniei de influență, fig.4.15.b, se poate scrie următoarea relație prin suprapunerea efectelor:

### 4.3.3.b Maximum bending moment

For a certain position of the train of loads on the beam, fig.4.15.a, the following relationship can be written by the superposition of effects, using the ordinates of the influence line, fig.4.15.b:

$$M_i = m_{i1} \cdot F_1 + m_{i2} \cdot F_2 + ... + m_{in} \cdot F_n = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \cdot F_j \qquad \textbf{(4.11)}$$

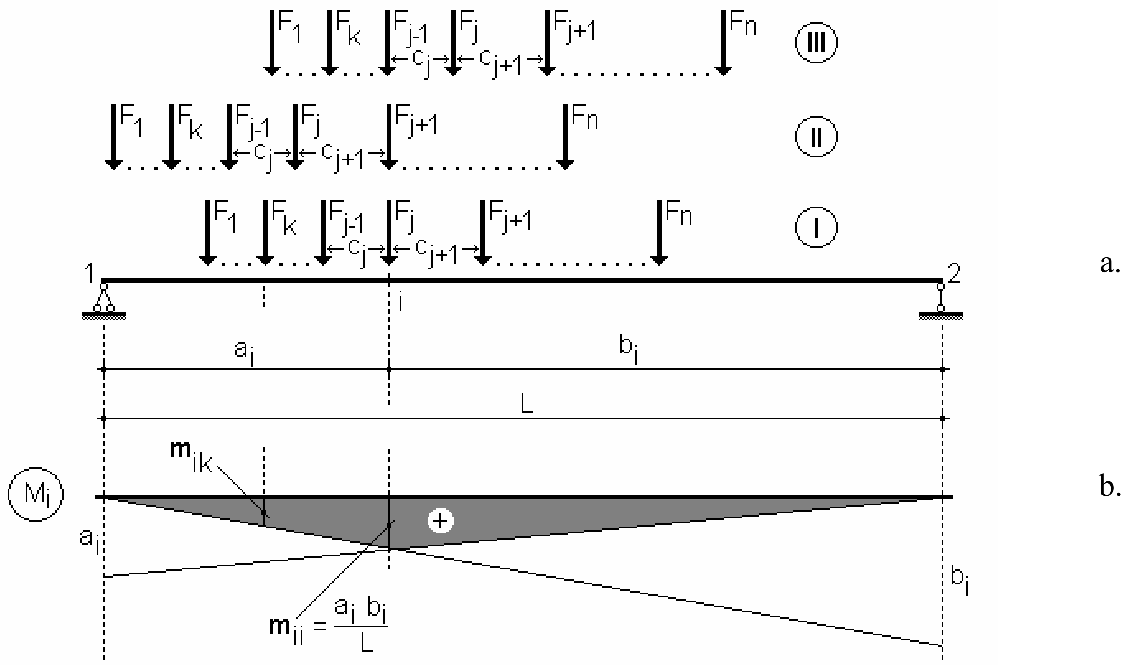



**Fig.4.15**

**Momentul încovoietor maxim într-o secțiune "i".**
a. - încărcarea, b. - linia de influență

**Maximum bending moment at a section "i".**
a. - loading, b. - influence line

Relația (4.11) arată că, pentru a obține efortul $M_i$ cât mai mare, trebuie ca:

- încărcările $F_j$ cu valori mari să fie în dreptul ordonatelor mari $m_{ij}$ ale liniei de influență;
- o forță să fie întotdeauna în secțiunea **i**, pentru a se înmulți cu valoarea maximă $m_{ij}$ a liniei de influență.

Practic (fără a prezenta demonstrația simplă, de altfel), se procedează astfel: pentru poziția ( **I** ) - $F_j$ în secțiunea **i**, fig.4.15.a, se calculează trei raporturi:

The relationship (4.11) shows that, in order to obtain the moment $M_i$ as large as possible, one has:

- the large loads $F_j$ have to be at sections with large ordinates $m_{ij}$ of the influence line;
- a load must always be at section **i**, to be multiplied by the maximum ordinate $m_{ij}$ of the influence line.

Practically (without showing the demonstration, which is very simple), one has: for position ( **I** ) - $F_j$ at section **i**, fig.4.15.a, three ratios are calculated:

$$p_a = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{a_i} \qquad p = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{L} \qquad p_b = \sum_{k=1}^{n} \frac{F_k}{b_i} \tag{4.12}$$

Există trei posibilități:

**a.** $\mathbf{p_a \langle p \langle p_b}$ caz în care convoiul de încărcări trebuie deplasat la stânga (poziția **II**, cu $F_{j+1}$ în secțiunea **i**);

**b.** $\mathbf{p_a \rangle p \rangle p_b}$ caz în care convoiul de încărcări trebuie deplasat la dreapta (poziția **III**, cu $F_{j-1}$ în secțiunea **i**);

**c.** $\mathbf{p_a \rangle p \langle p_b}$ caz care indică poziția de moment încovoietor maxim în secțiunea **i**.

Deci se fac încercări până se obține o relație de tip (**c**), calculându-se momentul încovoietor maxim:

There are three situations:

**a.** $\mathbf{p_a \langle p \langle p_b}$ case in which the train of loads has to be moved to the left (position **II**, with $F_{j+1}$ at section **i** );

**b.** $\mathbf{p_a \rangle p \rangle p_b}$ case in which the train of loads has to be moved to the right (position **III**, with $F_{j-1}$ at section **i** );

**c.** $\mathbf{p_a \rangle p \langle p_b}$ case which indicates the position for the maximum bending moment at section **i.**

Thus, trials are carried out until a relationship of type (**c**) is obtained. The maximum bending moment is calculated as follows:

$$M_i^{max} = \sum_{j=1}^{n} F_j \cdot m_{ij} \tag{4.13}$$

sau, ca pentru încărcările fixe:

or, as for fixed loads:

$$M_i^{max} = V_1 \cdot a_i - \sum_{k=1}^{j-1} F_k \cdot (a_i - a_k) \qquad \textbf{(4.14)}$$

**Observațiile anterioare pentru forța tăietoare maximă sunt valabile şi pentru momentul încovoietor maxim.**

**The previous observations for the maximum shear force are also valid for the maximum bending moment.**

### 4.3.3.c. Momentul încovoietor maxim-maximorum

### 4.3.3.c. Maximum-maximorum (absolute maximum) bending moment

Este momentul cel mai mare dintre toate momentele încovoietoare maxime corespunzătoare tuturor secțiunilor unei grinzi simplu rezemate pe care se deplasează un anumit convoi de încărcări mobile.

This is the largest bending moment of all the maxima bending moments corresponding to all the sections of a simply supported beam which is subjected to a certain train of moving loads.

In fig.4.16. este prezentată o înfăşurătoare a momentelor încovoietoare maxime, a cărei valoare maximă reprezintă momentul încovoietor maxim-maximorum (notat $M_{max\ max}$ sau, mai simplu, $M_{mm}$).

Fig.4.16. shows the envelope of the maxima bending moments, whose maximum value represents the maximum-maximorum bending moment (denoted by $M_{max\ max}$, or, more simple, $M_{mm}$).

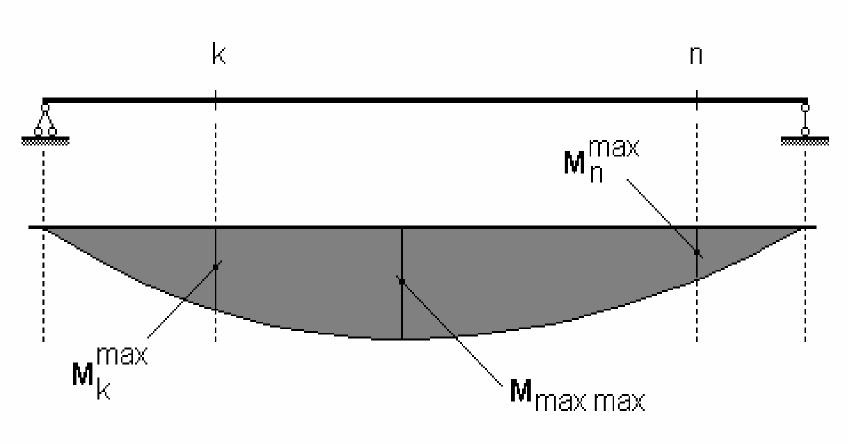



**Fig.4.16**

**Infăşurătoarea momentelor încovoietoare maxime.**

**Envelope of the maxima bending moments.**

Se consideră o poziţie oarecare pe grindă a convoiului de încărcări mobile, a cărui rezultantă este R şi se presupune că $M_{mm}$ se produce în dreptul forţei $F_h$. Cu notaţiile din fig.4.17.a, se poate scrie:

Consider a certain position of the train of loads of resultant R acting on the beam and assume that the $M_{mm}$ occurs at the section with $F_h$. Using the notations in fig.4.17.a, the following expressions can be written:

$$a_r + b_r = L \qquad \textbf{(4.15)}$$

$$M_{(F_h)} = V_1 \cdot (a_r - c) - \sum_{j=1}^{n-1} F_j \cdot d_j \qquad \textbf{(4.16)}$$

sau:

or:

$$M_{(F_h)} = \frac{R \cdot b_r}{L} \cdot (a_r - c) - \sum_{j=1}^{n-1} F_j \cdot d_j \qquad \textbf{(4.17)}$$

şi, ţinând cont de (4.15):

and considering the relationship (4.15):

$$M_{(F_h)} = \frac{R}{L} \cdot (L - a_r) \cdot (a_r - c) - \sum_{j=1}^{n-1} F_j \cdot d_j \qquad \textbf{(4.18)}$$

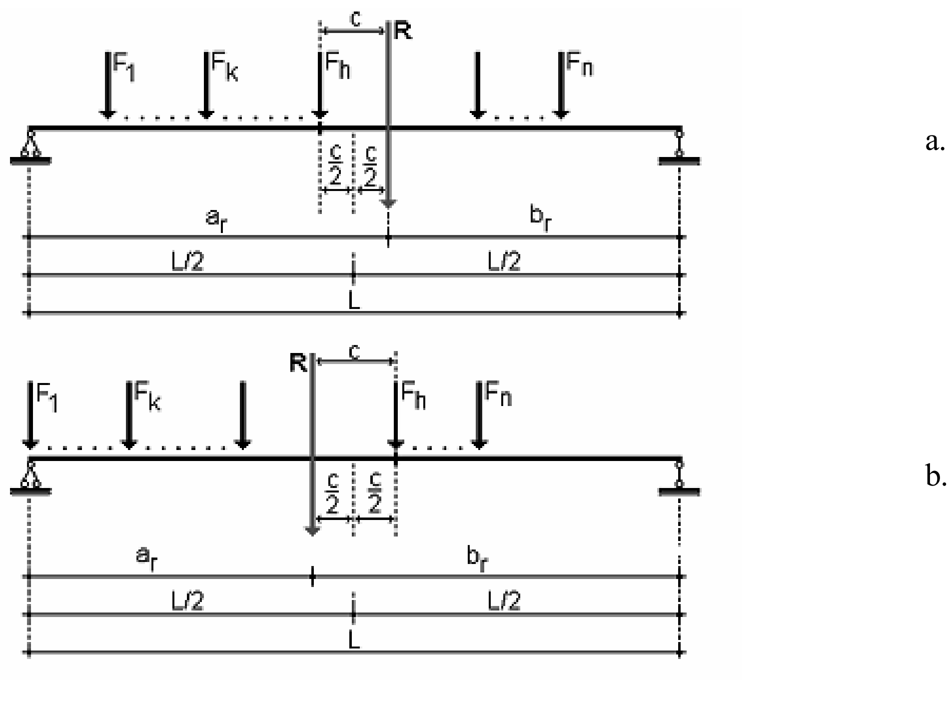



**Fig.4.17**

**Poziţia momentului încovoietor maxim-maximorum.**

**Position of the maximum-maximorum bending moment.**

Condiția de moment maxim:

The condition of maximum bending moment:

$$\frac{\partial M_{(F_n)}}{\partial a_r} = \frac{R}{L} \cdot (-2 \cdot a_r + c + L) = 0 \qquad \textbf{(4.19)}$$

conduce la:

resulting in:

$$a_r = \frac{L}{2} + \frac{c}{2} \qquad \textbf{(4.20)}$$

relație care indică condiția: pentru ca în dreptul lui $F_n$ să fie secțiunea de moment maxim-maximorum, mijlocul grinzii trebuie să împartă în două segmente egale distanța **c** dintre $F_n$ şi rezultanta R (vezi fig..4.17.).

relationship which indicates the condition: in order to have the maximum-maximorum bending moment at the section with $F_n$, the middle of the beam must divide the distance **c** between $F_n$ and the resultant R in two equal distances (see fig.4.17.).

Relația (4.20) înlocuită în (4.19) conduce la:

The relationship (4.20) is substituted into (4.19) and it results in:

$$M_{mm} = \frac{R}{4L} \cdot (L - c)^2 - \sum_{j=1}^{n-1} F_j \cdot d_j \qquad \textbf{(4.21)}$$

Relațiile (4.20) şi (4.21) au fost obținute pentru $F_n$ la stânga lui R. Pentru $F_n$ la dreapta lui R se obține:

The relationships (4.20) and (4.21) are obtained for $F_n$ to the left of **R**. For $F_n$ to the left of **R,** one obtains:

$$a_r = \frac{L}{2} - \frac{c}{2} \qquad \textbf{(4.22)}$$

$$M_{mm} = \frac{R}{4L} \cdot (L + c)^2 - \sum_{j=1}^{n-1} F_j \cdot d_j \qquad \textbf{(4.23)}$$

Practic, pentru a determina momentul încovoietor maxim-maximorum, se parcurg următoarele etape:

**i.** stabilirea poziției convoiului încărcărilor pentru care momentul maxim este la mijlocul grinzii;

Practically, in order to determine the maximum-maximorum bending moment, the following steps are followed:

**i.** determine the position of the train of loads for which the maximum bending moment is at the middle of the beam;

**ii.** determinarea poziției rezultantei **R** în raport cu forțele convoiului încărcărilor, deci a distanței **c** dintre **R** şi forța $F_n$ care, în etapa **(i),** era la mijlocul grinzii;

**iii**. presupunând că momentul maxim-maximorum se produce în dreptul lui $F_n$ (găsit în etapa **i**), trenul încărcărilor se deplasează la stânga sau la dreapta cu **c/2**, pentru a fi satisfăcută condiția de moment maxim-maximorum:

**ii.** determine th position of the resultant **R** relative to the forces of the train of loads, namely the distance **c** between **R** and the force $F_n$ which at step **(i)** was at the middle of the beam;

**iii**. assuming that the maximum-maximorum bending moment occurs at the section with $F_n$ (found at step **i**), the train of loads is moved to the left or right with **c/2**, in oder to satisfy the condition of maximum-maximorum bending moment:

$$a_r = \frac{L}{2} \pm \frac{c}{2} \qquad \textbf{(4.24)}$$

**iv.** verificarea din nou a condiției de moment încovoietor maxim în dreptul lui $F_n$:

**iv.** verify again the condition of maximum bending moment at the section with $F_n$:

$$p_a = \frac{\sum_{j=1}^{n} F_j}{\frac{L}{2} \mp \frac{c}{2}} \rangle \; p = \frac{\sum_{j=1}^{n} F_j}{L} \langle \; p_b = \frac{\sum_{j=h}^{n} F_j}{\frac{L}{2} \pm \frac{c}{2}} \qquad \textbf{(4.25)}$$

**v.** se calculează $V_1$ şi se verifică dacă în dreptul lui $F_n$ forța tăietoare îşi schimbă semnul;

**v.** calculate $V_1$ and verify if the shear force changes its sign at the section with $F_n$;

**vi.** se calculează valoarea momentului încovoietor maxim-maximorum - relația (4.18) sau:

**vi.** calculate the value of the maximum-maximorum bending moment - relationship (4.18) or:

$$M_{mm} = \frac{R}{4L} \cdot (L \mp c)^2 - \sum_{j=1}^{n} F_j \cdot d_j \qquad \textbf{(4.26)}$$

sau, ca pentru încărcările fixe:

or, as for the fixed loads:

$$M_{mm} = V_1 \cdot a_i - \sum_{j=1}^{n-1} F_j \cdot d_j \qquad \textbf{(4.27)}$$

# 5

# DEPLASARI ELASTICE

# ELASTIC DISPLACEMENTS

Datorită acțiunilor exterioare (încărcări, variații de temperatură, cedări de reazeme), elementele de rezistență şi structurile se deformează astfel încât secțiunile transversale îşi schimbă poziția lor inițială. Aceste modificări de poziții sunt denumite **"deplasări punctuale".** Există două tipuri de deplasări: deplasări liniare **d (săgeți)** şi deplasări unghiulare θ **(rotiri)**, fig.5.1

Due to the external loading (loads, changes in temperature, settlements), the structural members and the structures themselves deform in such a way that the cross sections chage their initial position. These changes in position are called "**point displacements**". There are two types of displacements : linear displacements **d (deflections)** and angular displacements θ **(rotations)**, fig.5.1.

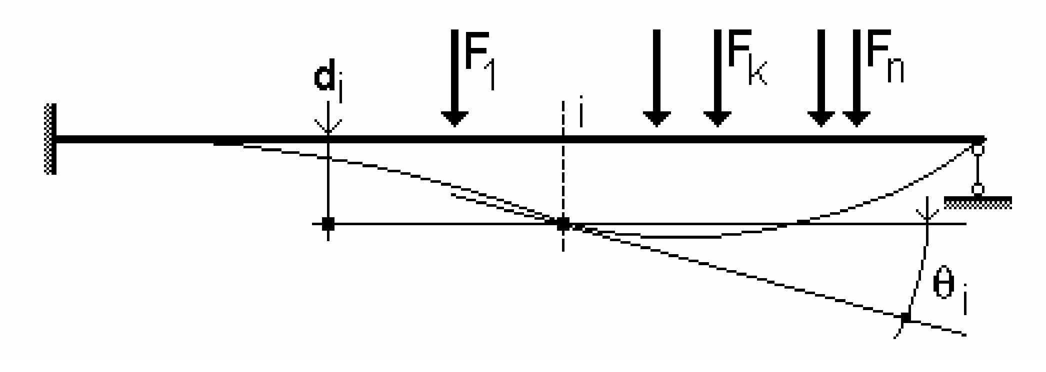



**Fig.5.1**

**Deplasări liniare d şi unghiulare θ.**

**Linear d and angular θ displacements.**

Deoarece există deplasări în toate direcțiile, se fac următoarele notații în raport cu un sistem spațial, fig.5.2.

Since there are displacements in all directions, the following notations are made with respect to a spatial system, fig.5.2.

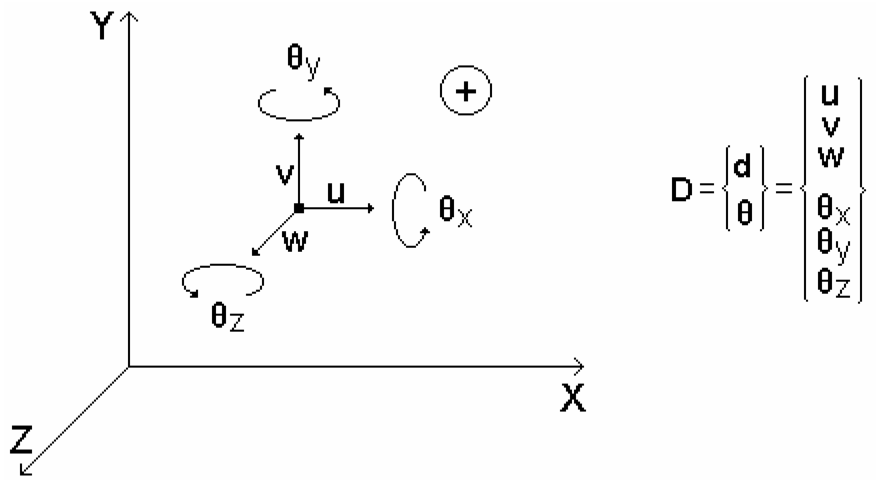



**Fig.5.2**

**Notarea deplasărilor.** **Notation of displacements.**

Se presupune că ipotezele enunțate in capitolul 1 sunt valabile, deci aici vor fi prezentate numai **metodele de calcul a deplasărilor elastice.**

Aceste metode sunt importante pentru:

- calculul de rigiditate al structurilor (evaluarea deplasărilor maxime, pentru ca valorile lor să rămână în limitele admisibile);
- calculul structurilor static nedeterminate.

Pentru calculul deplasărilor elastice există următoarele metode generale:

**a.** metode bazate pe integrarea ecuației diferențiale a fibrei medii deformate la încovoiere, prin:

**a.1.** ecuația diferențială de ordinul doi în următoarele variante:

- integrarea directă ;
- procedeul grinzii conjugate ;
- procedeul grafic.

It is assumed that the assumptions made in chapter 1 are valid, thus only the **methods for the calculation of the elastic displacements** will be presented next.

These methods are important for:

- the stiffness analysis of structures (calculation of the maxima displacements, in order to keep them within the permissible limits);
- the analysis of the statically indeterminate structures.

The following general methods can be used for the calculation of elastic displacements:

**a.** methods based on the integration of the differential equation of the medium deformed fibre in bending by:

**a.1.** second order differential equation, in the following versions:

- direct integration ;
- conjugate beam procedure ;
- graphical procedure.

**a.2.** ecuația diferențială de ordinul patru (metoda parametrilor inițiali);

**b.** metoda momentelor factoriale, elaborată de profesorul Anton Sesan, în care se stabilesc relații directe între funcțiile statice (acțiuni şi eforturi) şi funcțiile elastice (deplasările elastice) ale încovoierii, utilizând ca operatori "momentele factoriale";

**c.** metoda energetică, bazată pe teorema lui Castigliano;

**d.** metoda bazată pe principiul lucrului mecanic virtual.

Metodele **a** sunt dezvoltate la disciplina "Rezistența materialelor" şi sunt practice pentru elemente sau structuri liniare (grinzi), dar pot fi generalizate şi pentru alte tipuri de structuri. De exemplu, prima metoda este generalizată sub forma sistemelor conjugate sau a încărcărilor elastice şi este utilizată pentru determinarea "liniei elastice a structurilor" (forma deformată a axei structurilor).

Trebuie remarcat că metoda parametrilor inițiali, ca şi metoda momentelor factoriale, care, formal, sunt echivalente, pot fi exprimate sub formă matricială, practic pentru un calcul automat (în literatura de specialitate este prezentată sub denumirea de "metoda matricelor de transfer").

**Observație:**

In continuare se va dezvolta numai ultima metodă, bazată pe principiul lucrului mecanic virtual, ținând seama de generalitatea sa şi de utilitatea sa în calculul structurilor static nedeterminate.

**a.2.** fourth order differential equation (the method of initial parameters);

**b.** method of factorial moments, developed by Professor Anton Sesan, in which direct relationships between the static functions (external loads and internal forces) and the elatic functions (elastic displacements) in bending are formulated, by using as operators “factorial moments”;

**c.** energy method, based on Castiglian’s method;

**d.** method based on the principle of virtual work.

The methods **a** are discussed at “Strength of materials”, being practical for linear members or structures (beams) but they can be generalized for other types of structures. For example, the first method is generalized in the form of the conjugate systems or elastic loads and it is used for the determination of the “elastic line of structurtes” (the deflected shape of the axis of structures).

It has to be mentioned that the method of iniatial parameters and the method of factorial moments, which formally are equivalent, can be expressed in the matrix form in order to be used in computational calculations (this method is met in the literature as “the transfer matrix method”).

**Note:**

Only the last method will be presented next. This is based on the principle of virtual work, having a general character and being used in the analyis of the statically indeterminate structures.

## 5.1 LUCRUL MECANIC AL INCARCARILOR EXTERIOARE

In domeniul Mecanicii solidelor deformabile se pot distinge două situații în definirea expresiei lucrului mecanic:

**a.** încărcări şi deplasări independente (deplasarea din punctul de aplicație al fiecărei încărcări este produsă de o altă acțiune). In acest caz, lucrul mecanic este egal cu:

## 5.1 WORK DONE BY EXTERNAL LOADS

In the field of the Mechanics of elastic solids, the expression of the work can be written in two situations:

**a.** independent loads and displacements (displacement at the section of each load is produced by other load). In this case the work is equal to:

$$\mathbf{W} = \sum \pm \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{d}_i + \sum \pm \mathbf{M}_k \cdot \theta_k \qquad \textbf{(5.1)}$$

**b.** încărcări şi deplasări dependente (deplasarea din punctul de aplicație al fiecărei încărcări este produsă de încărcarea respectivă). In acest caz, fig.5.3, relația în domeniul elastic între **F, M** şi **d, θ** este:

**b.** dependent loads and displacements (displacement at the section of each load is produced by the load itself). In this case, fig.5.3, the relationship in the elastic field between **F, M** and **d, θ** is:

$$F = k_d \cdot d \quad \text{sau / or} \quad M = k_\theta \cdot \theta \qquad \textbf{(5.2)}$$

Generalizat, se poate scrie:

Generalized, it can be written that :

$$\boldsymbol{F} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} \qquad \textbf{(5.2')}$$

unde: $k_d$ , $k_\theta$ şi $k$ sunt constante elastice.

where: $k_d$ , $k_\theta$ and $k$ are elastic constants.

Lucrul mecanic elementar este:

The elementary work is:

$$\mathbf{dW} = \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{dD} \qquad \textbf{(5.3)}$$

iar lucrul mecanic total pentru $F_0$ şi $D_0$ este:

and the total work for $F_0$ and $D_0$ is:

$$\mathbf{W} = \int_0^{F_0} \boldsymbol{F} \cdot \mathbf{dD} = \int_0^{F_0} \boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{F}_0^{\,2}}{2 \cdot \mathbf{k}} \qquad \textbf{(5.4)}$$

Tinând seama de relația (5.2), rezultă:

Taking into acount the relationship (5.2), it results in:

$$\mathbf{W} = \frac{\boldsymbol{F_0}^2}{2 \cdot k} = \frac{\boldsymbol{F}_0 \cdot \mathbf{D_0}}{2} \qquad \textbf{(5.5)}$$

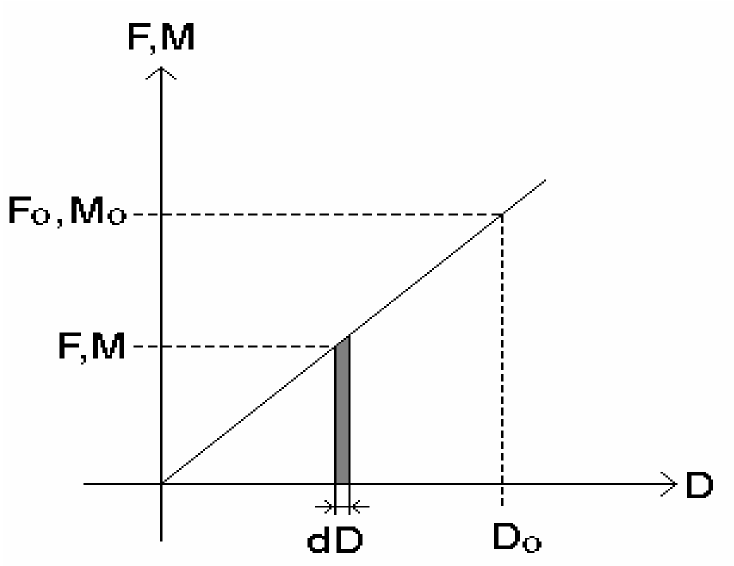



**Fig.5.3**

**Relația între forță sau moment și deplasare.**

**Relationship between force or moment and displacement.**

Deci, pentru mai multe acțiuni:

Thus, for more loads:

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\sum \mathbf{F_i} \cdot \mathbf{d_i} + \sum \mathbf{M_k} \cdot \theta_k\right) \qquad \textbf{(5.6)}$$

## 5.2 TEOREME DE RECIPROCITATE

## 5.2 THEOREMS OF RECIPROCITY

### 5.2.1 Teorema reciprocității lucrului mecanic

### 5.2.1 Theorem of reciprocal work

Se consideră un sistem elastic acționat de două grupe de acțiuni: $F_i, M_i$ (prima stare) și $F_k, M_k$ (a doua stare), fig.5.4.

Consider an elastic system subjected to two groups of loads : $F_i, M_i$ (first state of loads) and $F_k, M_k$ (second state of loads) , fig.5.4.

Se scrie lucrul mecanic în două ipoteze, vezi (5.1) și (5.6):

The work is written in two situations, see (5.1) and (5.6):

**a.** acționează la început $F_i, M_i$ și apoi $F_k, M_k$, fig 5.5:

**a.** $F_i, M_i$ are acting first, followed by $F_k, M_k$, fig 5.5:

$$W_{i,k} = \frac{F_i \cdot d_i}{2} + \frac{M_i \cdot \theta_i}{2} + \frac{F_k \cdot d_k}{2} + \frac{M_k \cdot \theta_k}{2} + F_i \cdot d_{ik} + M_i \cdot \theta_{ik} \quad \textbf{(5.7)}$$

unde $d_{ik}$, $\theta_{ik}$ sunt deplasarea şi rotirea produse în **i** de acțiunile din **k**, deci independent de $F_i, M_i$.

where $d_{ik}$, $\theta_{ik}$ are the displacement and rotation at **i** produced by the loads at **k**, thus independent from $F_i, M_i$.

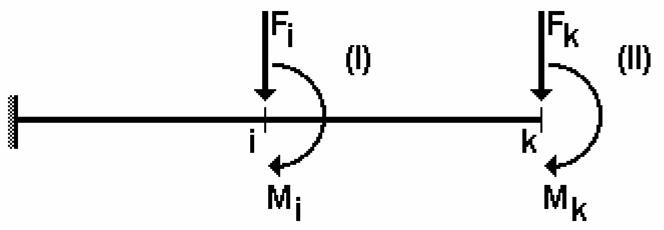



**Fig.5.4**

**Sistem elastic acționat de două grupe de acțiuni.**

**Elastic system subjected to two groups of loads.**

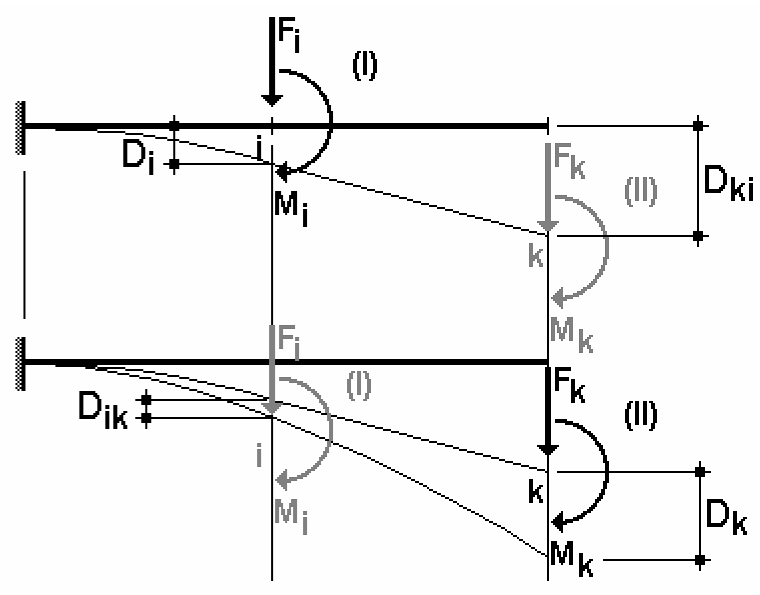



**Fig.5.5**

**Sistem elastic acționat la inceput de $F_i, M_i$ şi apoi de $F_k, M_k$.**

**Elastic system subjected firstly to $F_i, M_i$, followed by $F_k, M_k$.**

**b.** acționează la început $F_k, M_k$ şi apoi $F_i, M_i$, fig.5.6:

**b.** $F_k, M_k$ are acting first, followed by $F_i, M_i$, fig.5.6:

$$\mathbf{W_{k,i}} = \frac{\mathbf{F_k \cdot d_k}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{M_k \cdot \theta_k}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{F_i \cdot d_i}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{M_i \cdot \theta_i}}{\mathbf{2}} + \mathbf{F_k \cdot d_{ki} + M_k \cdot \theta_{ki}} \qquad \mathbf{(5.8)}$$

unde $d_{ki}$, $\theta_{ki}$ sunt deplasarea şi rotirea produse în **k** de acţiunile din **i**, aşadar independent de $F_k, M_k$.

where $d_{ki}$, $\theta_{ki}$ are the displacement and rotation at **k** produced by the loads at **i,** thus independent from $F_k, M_k$.

In domeniul elastic $W_{i,k} = W_{k,i}$, deci egalând (5.7) cu (5.8) se obţine:

In the elastic range $W_{i,k} = W_{k,i}$, thus by equating (5.7) to (5.8), one obtains:

$$\mathbf{F_i \cdot d_{ik} + M_i \cdot \theta_{ik} = F_k \cdot d_{ki} + M_k \cdot \theta_{ki}} \qquad \mathbf{(5.9)}$$

Relaţia (5.9) sintetizează teorema reciprocităţii lucrului mecanic (**teorema lui Betti**) si are enunţul:

The relationship (5.9) summarises the theorem of reciprocal work (**Betti's theorem**), which is stated as follows:

**Pentru două stări I şi II de încărcări şi deplasări, lucrul mecanic al încărcărilor din prima stare cu deplasările din cea de a doua stare este egal cu lucrul mecanic al încărcărilor din cea de a doua stare cu deplasările din prima stare.**

**For two states of loading and displacements I and II, the work done by the loads of the first state of loads on the displacements of the second state of loads is equal to the work done by the loads of the second state of loads on the displacements of the first state of loads.**

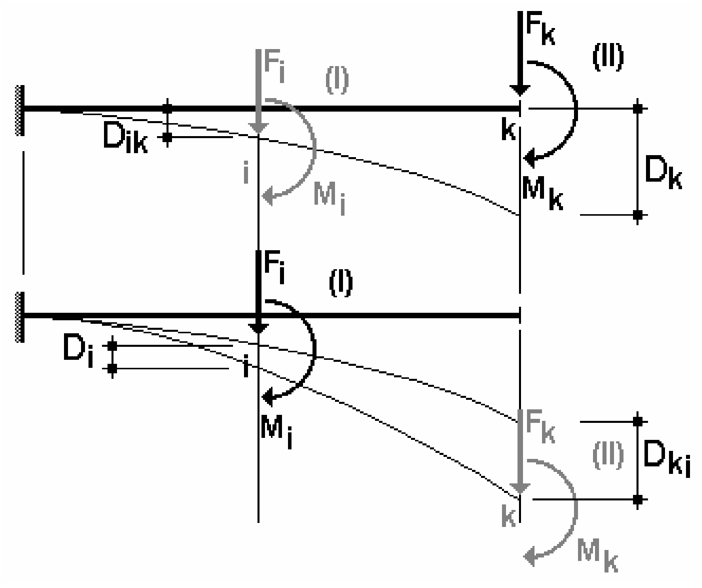



**Fig.5.6**

**Sistem elastic acţionat la inceput de $F_k, M_k$ şi apoi de $F_i, M_i$.**

**Elastic system subjected firstly to $F_k, M_k$, followed by $F_i, M_i$.**

Atunci, simbolic:

Thus, symbolically:

$$\mathbf{W}_{\mathbf{I,II}} = \mathbf{W}_{\mathbf{II,I}} \qquad \mathbf{(5.10)}$$

## 5.2.2 Teoremele de reciprocitate a deplasărilor

## 5.2.2 Theorems of reciprocal displacements

Considerând succesiv în (5.9) forțe egale cu 1, rezultă:

By considering successively forces equal to 1 in (5.9), one obtains:

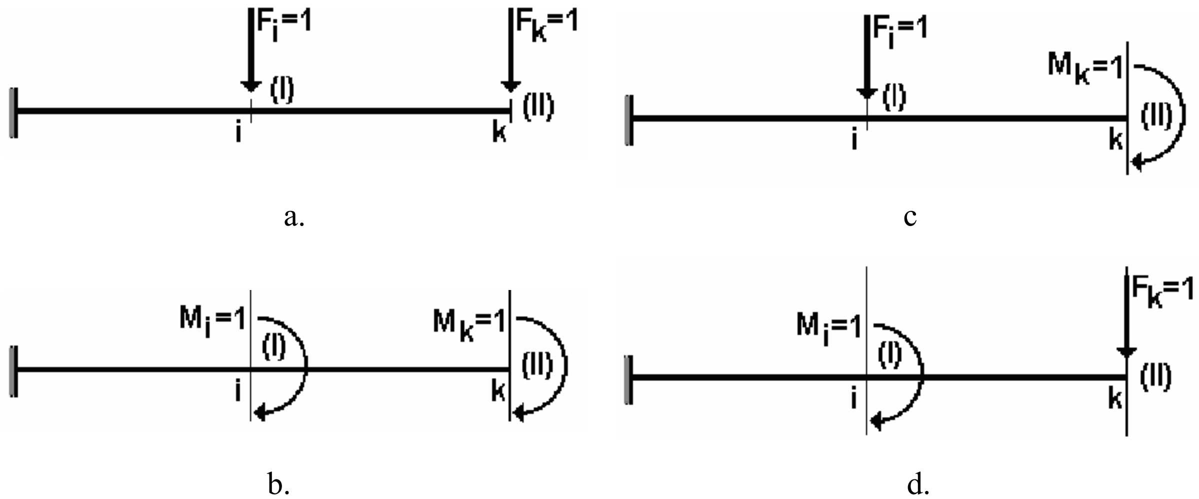



**Fig.5.6**

**Sistem elastic supus la acțiuni egale cu unitatea.**

**Elastic system subjected to unit loads.**

**a.** pentru / for $F_i = 1,\ F_k = 1$ şi / and $M_i = M_k = 0$, fig. 5.6.a:

$$d_{ik}^{F} = d_{ki}^{F} \qquad \mathbf{(5.11)}$$

care indică **reciprocitatea deplasărilor liniare** (săgeți);

which indicates **the reciprocity of linear displacements** (deflections);

**b.** pentru / for $M_i = 1,\ M_k = 1$ şi / and $F_i = F_k = 0$, fig.5.6.b:

$$\theta_{\mathbf{ik}}^{\mathbf{M}} = \theta_{\mathbf{ki}}^{\mathbf{M}} \qquad \mathbf{(5.12)}$$

care indică **reciprocitatea rotirilor**;

which indicates **the reciprocity of rotations**;

**c.** pentru / for $F_i = 1,\ M_k = 1$ şi / and $M_i = F_k = 0$, fig.5.6.c:

$$\mathbf{d}_{\mathbf{ik}}^{\mathbf{M}} = \theta_{\mathbf{ki}}^{\mathbf{F}} \qquad \mathbf{(5.13)}$$

**d.** pentru / for $M_i = 1$, $F_k = 1$ şi / and $F_i = M_k = 0$, fig.5.6.d:

$$\theta_{ik}^{F} = d_{ki}^{M} \tag{5.14}$$

Relațiile (5.13) şi (5.14) indică **reciprocitatea mixtă.**

The relationships (5.13) and (5.14) indicate **the mixed reciprocity.**

**Observații:**

- Pentru deplasări şi forțe egale cu 1, se obține reciprocitatea combinată între mărimile statice (forțe, momente) şi mărimile elastice (deplasări liniare, rotații).
- Pentru deplasări egale cu 1, se obține reciprocitatea forțelor, a momentelor şi mixtă.
- Aceste reciprocități vor fi întâlnite în metodele de calcul a structurilor static nedeterminate.

**Note:**

- For displacements and forces equal to 1, the combined reciprocity between static quantities (forces, moments) and elastic quantities (deflections, rotations) is obtained.
- For displacements equal to 1, the forces, moments or mixed reciprocity, respectively, are obtained.
- These reciprocities will be encountered in the analysis of statically indeterminate structures.

## 5.3 CALCULUL DEPLASARILOR BAZAT PE PRINCIPIUL LUCRULUI MECANIC VIRTUAL

## 5.3 CALCULATION OF DISPLACEMENTS USING VIRTUAL WORK

### 5.3.1 Relația Mohr-Maxwell

Se utilizeaza teorema de reciprocitate a lucrului mecanic considerând următoarele două stări:

**a.** o stare reală: structura acționată de sarcini exterioare, unde există de asemenea cedări de reazeme $D_k$ şi pentru care se calculează deplasarea $D_i$ (liniară $d_i$ sau rotirea $\theta_i$), fig.5.7.a;

**b.** o stare virtuală (fictivă): aceeaşi structură, acționată numai de o forță $F = \overline{1}$ (dacă $D_i$ este o deplasare liniară) sau de un moment $M = \overline{1}$ (dacă $D_i$ este o rotire), fig.5.7.b.

### 5.3.1 Mohr-Maxwell law

The theorem of reciprocal work is used in the following two states:

**a.** a real state: the structure is subjected to external loads, including also settlements $D_k$, for which the displacement $D_i$ is calculated (deflection $d_i$ or rotation $\theta_i$), fig.5.7.a:

**b.** a virtual (imaginary) state : the same structure subjected only to a force $F = \overline{1}$ (if $D_i$ is a deflection) or a moment $M = \overline{1}$ (if $D_i$ is a rotation), fig.5.7.b.

Eforturile produse de forțele exterioare în structura reală sunt notate $N_p, M_p, Q_p, T_p$:

The internal forces in the real structure produced by the external loads are denoted by $N_p, M_p, Q_p, T_p$:

Reacțiunile produse de acțiunile egale cu $\overline{1}$ sunt notate $\overline{R}_k^i$ iar deformațiile interioare în situația virtuală sunt: $\overline{dL}$ (deformație axială), $\overline{d\theta}$ (rotație din încovoiere), $\overline{dy}$ (deformație de forfecare) și $\overline{d\theta_t}$ (rotație din torsiune). Aceste deformații au expresiile cunoscute și indicate în fig.5.7.

The reactions produced by the loads equal to $\overline{1}$ are denoted by $\overline{R}_k^i$ and the internal deformations in the virtual state are: $\overline{dL}$ (axial deformation), $\overline{d\theta}$ (rotation due to bending), $\overline{dy}$ (shear deformation) and $\overline{d\theta_t}$ (rotation due to torsion). These deformations have the known expressions shown in fig.5.7.

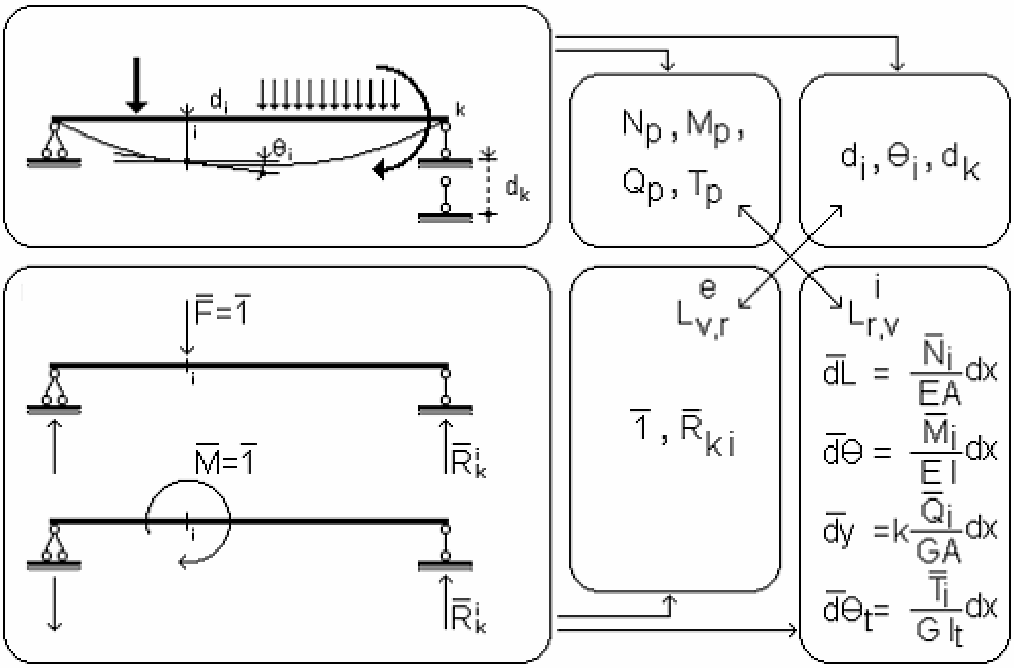



**Fig.5.7**

**Starea reală (a.) și starea virtuală (b.).** **Real state (a.) and virtual state (b.).**

**Observație:**
**k** este coeficientul de neuniformitate pentru repartiția tensiunilor tangențiale (k=1.2 pentru secțiunea rectangulară, k=2 ... 2.5 pentru secțiuni laminate T, k=32/27 pentru secțiunea circulară, etc.).

**Note**:
**k** is the nonuniformity coefficient for the shear stresses (k=1.2 for rectangular section, k=2 … 2.5 for T sections, k=32/27 for circular sections, etc.).

Teorema reciprocității lucrului mecanic se aplică aici sub forma:

The theorem of reciprocal work is used here in the form:

$$\mathbf{W^{e}_{v,r} = W^{i}_{r,v}} \tag{5.15}$$

unde:

where:

$W^{e}_{v,r}$ este lucrul mecanic exterior al acțiunilor şi reacțiunilor din situația virtuală cu deplasările din situația reală;

$W^{e}_{v,r}$ is the external work done by the loads and reactions in the virtual state on the displacements in the real state;

$W^{i}_{r,v}$ - lucrul mecanic interior al eforturilor din situația reală cu deformațiile din situația virtuală.

$W^{i}_{r,v}$ - the internal work done by the internal forces in real state on the deformations in the virtual state.

Aşadar (vezi fig.5.7):

Thus (see fig.5.7):

$$\mathbf{\overline{1} \cdot D_i + \sum \pm \overline{R}_{ki} \cdot D_k =}$$
$$\mathbf{= \sum \int N_p \frac{\overline{N}_i \cdot dx}{E \cdot A} + \sum \int M_p \frac{\overline{M}_i \cdot dx}{E \cdot I} + \sum k \cdot \int Q_p \frac{\overline{Q}_i \cdot dx}{G \cdot A} + \sum \int T_p \frac{\overline{T}_i \cdot dx}{G \cdot I_t}} \tag{5.16}$$

Relația de mai sus este **relația Mohr-Maxwell** pentru calculul deplasărilor elastice punctuale a structurilor plane formate din bare drepte, supuse la sarcini şi cedări de reazeme.

The above relationship is the **Mohr-Maxwell law** for the calculation of elastic point displacements of plane structures composed of straight bars, subjected to external loads and settlements.

**Observații:**

**Note:**

- Pentru a calcula o deplasare relativă între două puncte, acțiunea din starea virtuală este o pereche de forțe egale cu $\overline{1}$ pe direcția respectivă (fig.5.8.a) iar pentru a calcula o rotație relativă (într-o articulație), acțiunea din situația virtuală este o pereche de momente egale cu $\overline{1}$ (fig.5.8.b).

- In order to calculate the relative displacement between two points, the load in the virtual state is a pair of forces equal to $\overline{1}$ acting in the corresponding direction (fig.5.8.a). In order to calculate a relative rotation (in a hinge), the load in the virtual state is a pair of moments equal to $\overline{1}$ (fig.5.8.b).

- Făcând notațiile generice:

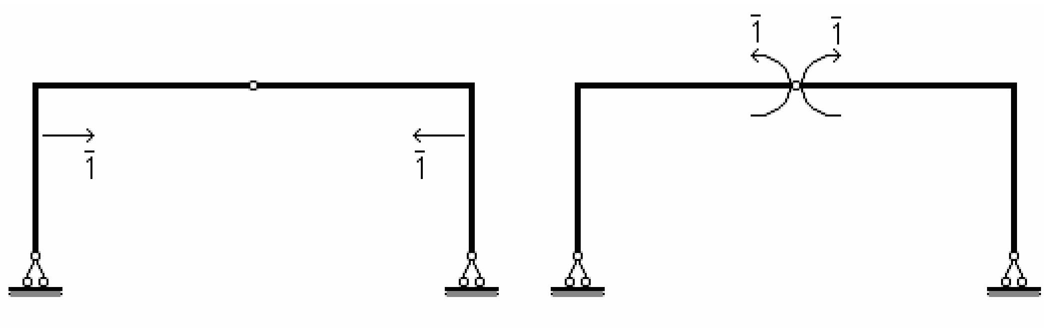
- By using the general notations:

$$\mathbf{S_p = \{N_p, M_p, Q_p, T_p\}}$$
$$\mathbf{\overline{S}_i = \{\overline{N}_i, \overline{M}_i, \overline{Q}_i, \overline{T}_i\}} \tag{5.17}$$
$$\mathbf{B = \{EA, EI, GA/k, GI_t\}}$$

fiecare termen din al doilea membru din (5.16) poate fi scris:

each term in the right hand side of the relationships (5.16) can be written as:

$$\sum \int \mathbf{S_p} \frac{\mathbf{S_i}}{\mathbf{B}} \mathbf{dx} \qquad \textbf{(5.18)}$$




a. **b.**

**Fig.5.8.**

**Calculul deplasărilor relative dintre două puncte.**

**Calculation of the relative displacement between two points.**

- In unele cărți, efortul produs de acțiunile din starea virtuală ( $\overline{N}_i, \overline{M}_i, \overline{Q}_i, \overline{T}_i$ ) sunt notate:

- In some textbooks, the internal force produced by the loads in the virtual state ( $\overline{N}_i, \overline{M}_i, \overline{Q}_i, \overline{T}_i$ ) are denoted as:

$$n_i, m_i, q_i, t_i$$

- Dacă semnul deplasării calculat cu relatia Mohr-Maxwell este "minus", aceasta înseamnă că deplasarea se produce în sens invers acțiunii $\overline{1}$ din starea virtuală.

- If the sign of the displacement calculated using the Mohr-Maxwell law is “minus”, it means that the displacement takes place in opposite sense to the load $\overline{1}$ in the virtual state.

**Exemplu / Example 5.1**

Calculați $\theta_1$ și $v_1$ pentru grinda cu secțiunea constantă din fig.5.9 (ținând seama numai de efectul momentului încovoietor).

Calculate $\theta_1$ and $v_1$ for the beam with constant cross section shown in fig.5.9 (taking into account only the effect of the bending moment).

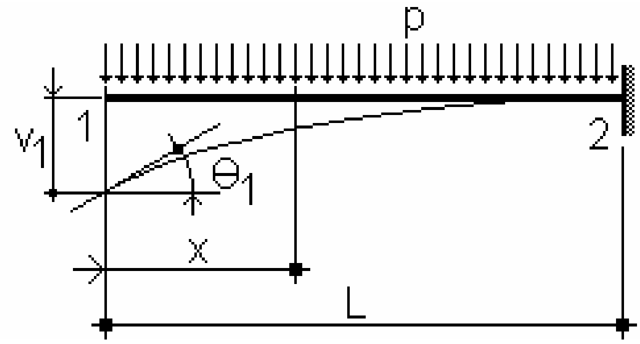



**Fig.5.9**

**a.** prin metoda grinzii conjugate fig.5.10:

**a.** using the method of the conjugate beam, fig.5.10:

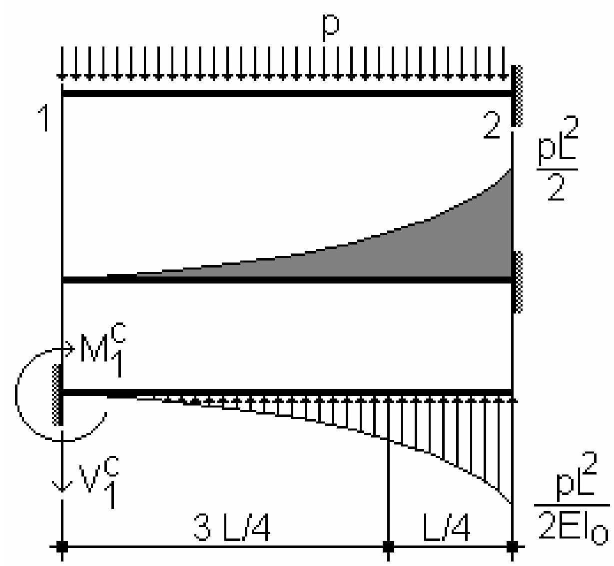



**Fig.5.10**

**Grinda conjugată.**

**Conjugate beam.**

Rezultă :

One obtains :

$$\theta_1^r = Q_1^c = \frac{1}{3}\frac{pL^2}{2EI_0}L = \frac{pL^3}{6EI_0}$$

$$v_1^r = M_1^c = \frac{1}{3}\frac{pL^2}{2EI_0}L \cdot \frac{3}{4}L = \frac{pL^4}{8EI_0}$$

**b.** prin relația Mohr-Maxwell:

**b.** using the Mohr-Maxwell law:

**b.1** calculul rotirii $\theta_1$, fig.5.11:

**b.1** calculation of rotation $\theta_1$, fig.5.11:

- efortul din starea reală, $M_p$:

- internal moment in the real state, $M_p$:

$$M(x) = M_p = -\frac{p \cdot x^2}{2}$$

- efortul din starea virtuală, $\overline{M}_i$:

- internal moment in the virtual state, $\overline{M}_i$:

$$\overline{M}_1^{\theta}(x) = -1$$

aşadar:

thus:

$$\overline{1} \cdot D_1 = \theta_1 = \int_0^L \frac{M_p \cdot M_1^{\theta}}{E \cdot I} d_x = \frac{1}{E \cdot I_0} \int_0^L \left( -p \cdot x \cdot \frac{x}{2} \right) \cdot \overline{1} \cdot d_x = \frac{p \cdot L^3}{6 \cdot E \cdot I_0}$$

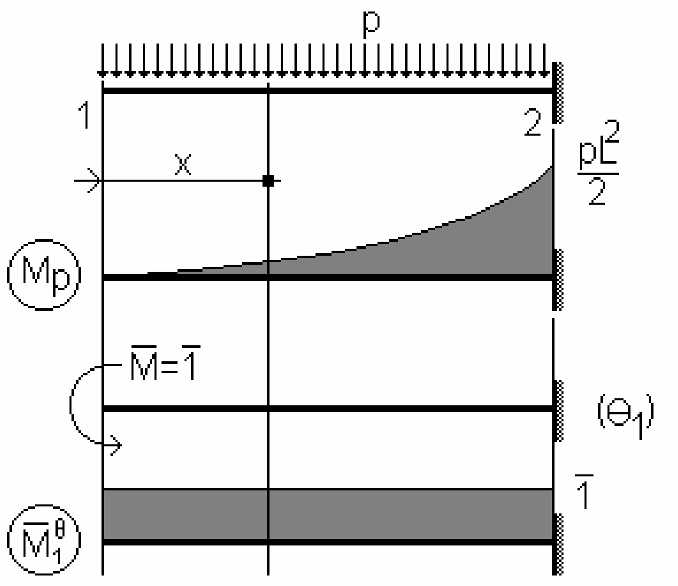



**Fig.5.11**

**b.2** calculul săgeţii $v_1$, fig.5.12:

**b.2** calculation of deflection $v_1$, fig.5.12:

- efortul din starea reală, $M_p$:

- internal moment in the real state, $M_p$:

$$M(x) = M_p = -\frac{p \cdot x^2}{2}$$

- efortul din starea virtuală, $\overline{M}_i$:

- internal moment in the virtual state, $\overline{M}_i$:

$$\overline{M}_1^d(x) = -1 \cdot x$$

aşadar:

thus:

$$\overline{1} \cdot D_1 = v_1 = \int_0^L \frac{M_p \cdot \overline{M}_1^d}{E \cdot I} dx = \frac{1}{E \cdot I_0} \cdot \int_0^L (-p \cdot x \cdot \frac{x}{2}) \cdot (-\overline{1} \cdot x)\, dx = \frac{p \cdot L^4}{8 \cdot E \cdot I_0}$$

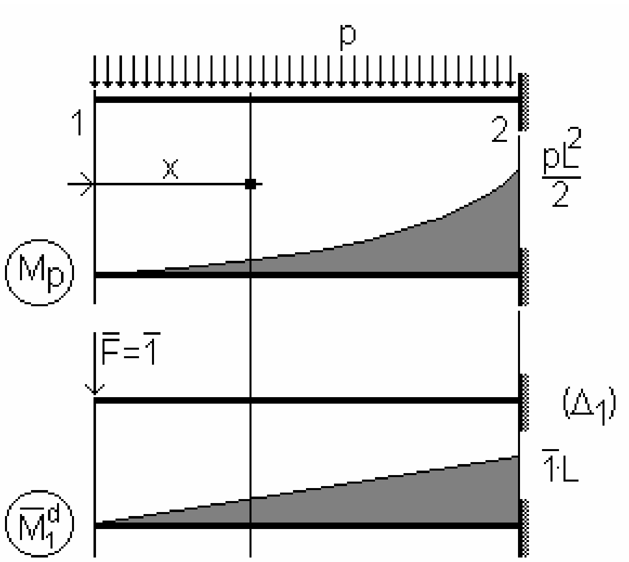



**Fig.5.12**

**E 5.1** ✍

## 5.3.2 Soluție practică de integrare a relației Mohr-Maxwell pentru bare drepte cu secțiune constantă

## 5.3.2 Practical solution for the integration of the Mohr-Maxwell law for straight bars with constant cross section

In acest caz eforturile din starea virtuală au întotdeauna o variație liniară, în timp ce eforturile din starea reală au variații liniare sau parabolice (de gradul doi sau trei).

In this case, the internal forces in the virtual state always have a linear variation while the internal forces in the real state have linear or parabolic variantions (second or third degree).

Cu notațiile generice (5.17) şi considerând că pe intervalul $x_1 - x_2$ (fig.5.13) atât $S_p$ cât şi $\overline{S}_i$ sunt **funcții continue,** că $\overline{S}_i$ are o variație liniară ($\overline{S}_i = a \cdot x + b$)) şi că B este constant, integrala (5.18) poate fi scrisă după cum urmează:

With the general notations (5.17) and taking into account that on the interval $x_1 - x_2$ (fig.5.13) both $S_p$ and $\overline{S}_i$ are **continuous functions**, considering that $\overline{S}_i$ has a linear variation ($\overline{S}_i = a \cdot x + b$) and B is constant, the integral (5.18) can be written as follows:

$$\int_{x_1}^{x_2} S_p \frac{\overline{S}_i}{B} dx = \frac{1}{B}\int_{x_1}^{x_2} S_p \overline{S}_i \, dx = \frac{1}{B}\int_{x_1}^{x_2} S_p (ax+b)\, dx = \\ = \frac{1}{B}\left( a\int_{x_1}^{x_2} S_p x\, dx + b\int_{x_1}^{x_2} S_p \, dx \right) = \frac{1}{B}\left( a\int_{x_1}^{x_2} dS_{S_p} + b\int_{x_1}^{x_2} dA_{S_p} \right) \quad (5.19)$$

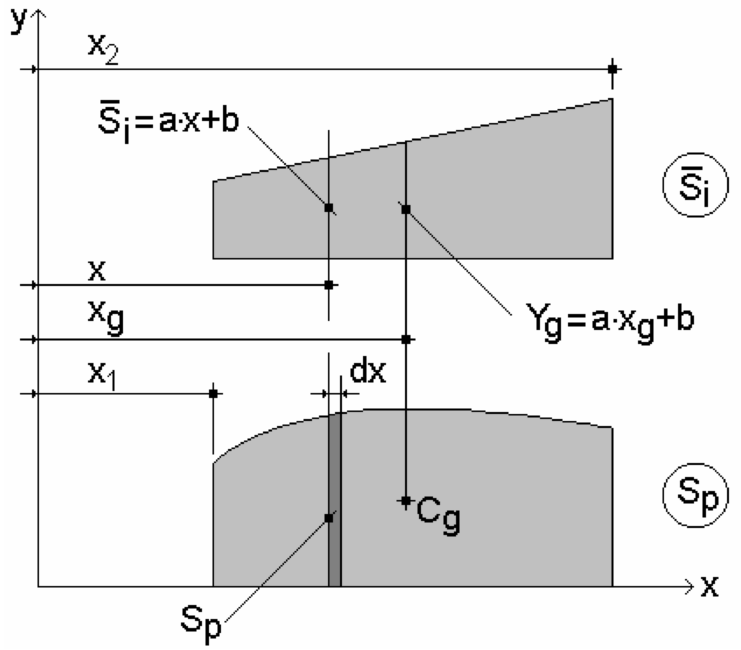



**Fig.5.13**

**Variațiile funcțiilor $S_p$ şi $\overline{S}_i$.**

**Variation of functions $S_p$ and $\overline{S}_i$.**

unde:

where:

$$dA_{S_p} = S_p \cdot dx \quad (5.20)$$

este aria elementară a diagramei $S_p$,

is the elementary area of the diagram $S_p$,

$$dS_{S_p} = S_p \cdot x \cdot dx = x \cdot dA_{S_p} \quad (5.21)$$

este momentul static al ariei elementare $dA_{S_p}$ în raport cu originea sistemului de axe.

is the static moment of the elementary area $dA_{S_p}$ with respect to the origin of the coordinate system.

Făcând integrarea , (5.19) devine:

By integrating, (5.19) becomes:

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{S_p \frac{S_i}{B} dx = \frac{1}{B}(a \cdot S_p + b \cdot A_{S_p})} \quad \textbf{(5.22)}$$

unde $S_p$ şi $A_{S_p}$ sunt momentul static în raport cu originea sistemului de axe şi respectiv aria diagramei $S_p$.

where $S_p$ and $A_{S_p}$ are the static moment with respect to the origin of the coordinate system and the area of the diagram $S_p$, respectively.

Dar:

But :

$$\mathbf{S_p = A_{S_p} \cdot x_G} \quad \textbf{(5.23)}$$

deci:

thus:

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{S_p \frac{S_i}{B} dx = \frac{1}{B} A_{S_p}(a \cdot x_g + b)} \quad \textbf{(5.24)}$$

Deoarece $a \cdot x_G + b = \overline{y}_{C_g}$, în final se obține:

Since $a \cdot x_G + b = \overline{y}_{C_g}$, finally one obtains:

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{S_p \frac{S_i}{B} dx = \frac{1}{B} A_{S_p} \overline{y}_{C_g}} \quad \textbf{(5.25)}$$

unde:

where:

$A_{S_p}$ este aria diagramei $S_p$ **pe intervalul de integrare**;

$\overline{y}_{C_g}$ este ordonata din diagrama $\overline{S}_i$ **din dreptul centrului de greutate a diagramei** $\overline{S}_i$.

$A_{S_p}$ is the area of the diagram $S_p$ **over the integration interval**;

$\overline{y}_{C_g}$ is the ordinate in the $\overline{S}_i$ diagram **at the centroid of the** $\overline{S}_i$ diagram.

O estimare uşoară a expresiei (5.18) este posibilă dacă considerăm reprezentarea grafică din fig.5.14. Valoarea integralei este dată de volumul prismei din figură:

An easy estimation of the expression (5.18) is possible if the graphical representation in fig.5.14 is considered. The value of the integral is given by the volume of the prism shown in the figure:

$$\int \mathbf{S_p \frac{\overline{S}_i}{B} dx = \frac{1}{B} \int S_p \overline{S}_i \, dx = V = \frac{1}{B} \cdot A_{S_p} \cdot \overline{y}_{C_g} = \frac{1}{B} \cdot A_{S_p} \cdot \overline{S}_i(C_g)} \quad \textbf{(5.26)}$$

**Observații:**

- Semnul (±) depinde de semnele relative ale diagramelor $S_p$ şi $\overline{S}_i$.

- Pentru diagramele de ordinul **k**, expresiile ariilor şi ale pozițiilor centrelor de greutate sunt prezentate în fig.5.15 şi sunt particularizate pentru k=2 în fig.5.16.

**Note:**

- The sign (±) depends on the relative sign of the $S_p$ and $\overline{S}_i$ diagrams.

- For diagrams of **k** order, the expressions of the areas and the positions of the centroids are shown in fig.5.15. Fig.5.16 shows the particular case for k=2.

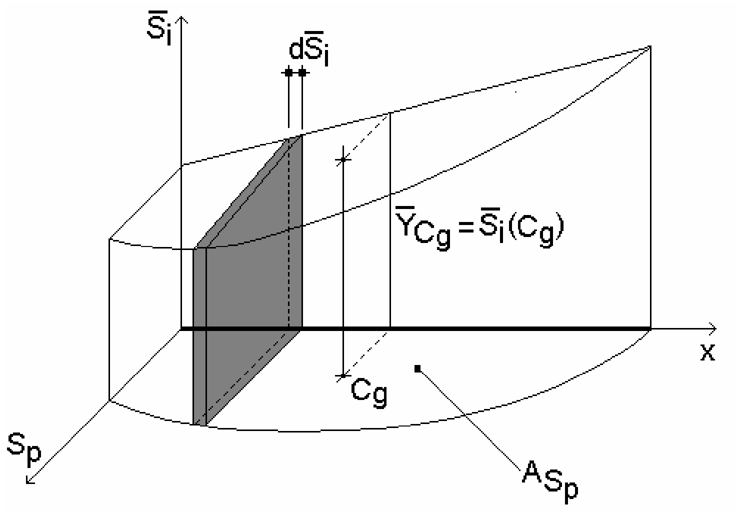



**Fig.5.14**

**Volumul** $\int S_p \overline{S}_i \, dx$.

**Volume** $\int S_p \overline{S}_i \, dx$.

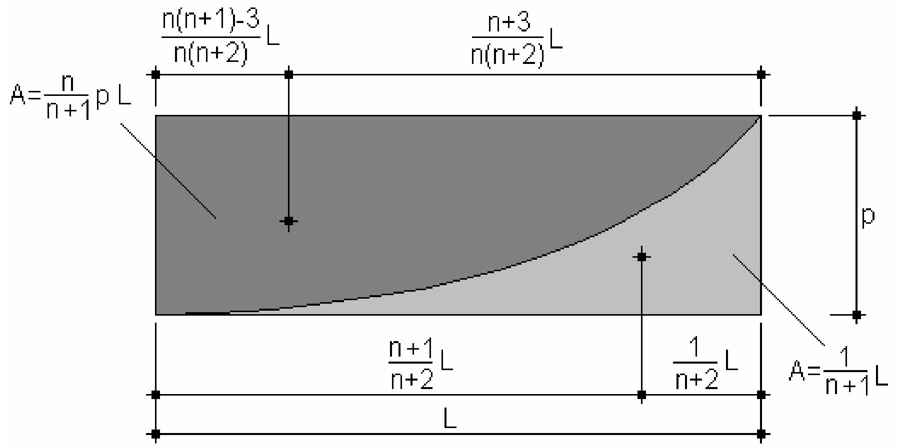



**Fig.5.15**

**Ariile şi pozițiile centrului de greutate pentru diagrame de ordinul k.**

**Arias and positions of centroid for diagrams of k order.**

- Orice diagramă, oricât de complicată, poate fi descompusă în diagrame simple conform fig.5.17. Aceasta este **"regula grinzii simplu rezemate"**, care constă în suprapunerea efectelor, considerând că diagrama respectivă aparține unei grinzi simpu rezemate, încărcată conform diagramei în discuție.

- Any diagram, regardless of its complexity, can be broken up in simple diagrams, as shown in fig.5.17. This is the **"simply supported beam rule"**, based on the superposition of effects. It is considered that the diagram belongs to a simply supported beam, loaded according to the corresponding diagram.

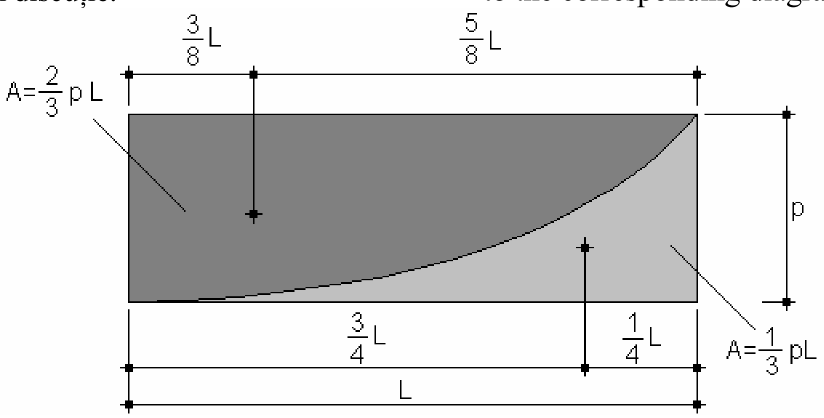



**Fig.5.16**

**Ariile şi pozițiile centrului de greutate pentru diagrame de ordinul 2.**

**Areas and positions of the centroid for the second order diagrams.**

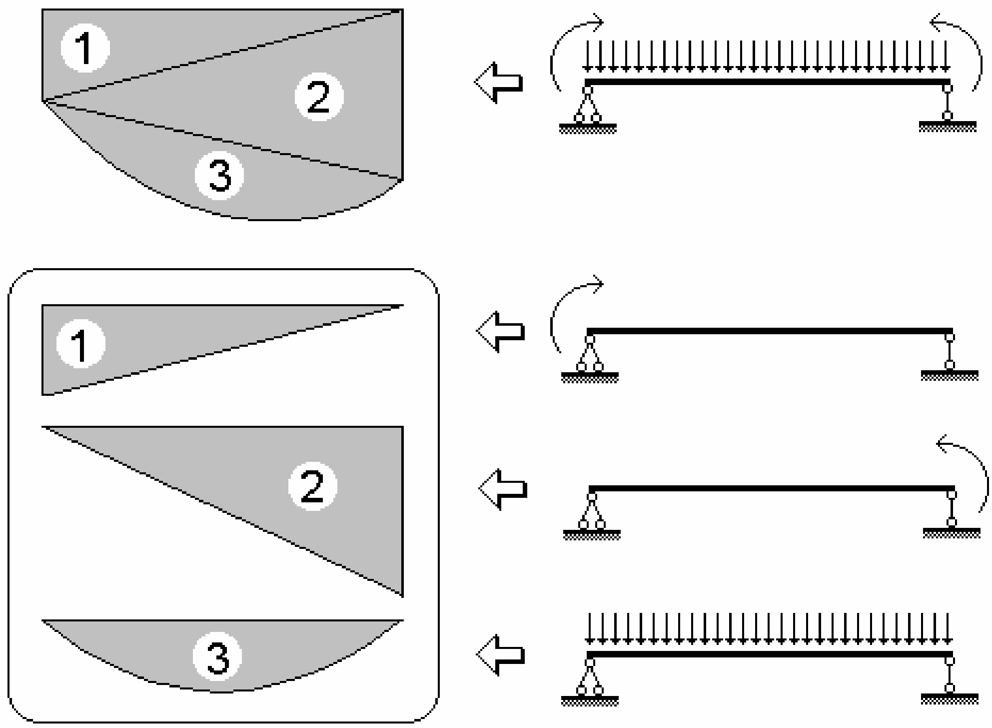



**Fig.5.17**

**Descompunerea în diagrame simple.**

**Braking up in simple diagrams.**

- In cazul în care ambele diagrame $S_p$ şi $\overline{S}_i$ sunt trapeze, prin descompunerea în patru diagrame simple, fig.5.18, obținem relația (5.27).

- In the case when both $S_p$ and $\overline{S}_i$ diagrams are trapezia, by braking them up in four simple diagrams, fig.5.18, the relationship (5.27) is obtained.

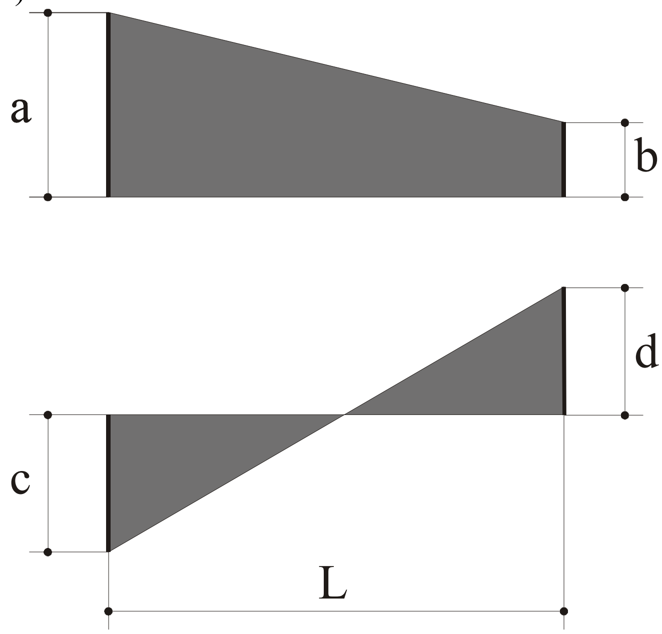



**Fig.5.18**.

**Cazul în care diagramele sunt trapeze.**

**Case when the diagrams are trapezia.**

$$\int S_p \frac{\overline{S}_i}{B} dx = \frac{L}{6 \cdot B}\left(\pm 2 \cdot a \cdot c \pm 2 \cdot b \cdot d \pm a \cdot d \pm c \cdot b\right) \qquad \textbf{(5.27)}$$

Semnele (±) depind de semnele relative ale factorilor fiecarui termen.

The signs (±) depend on the relative signs of the factors of each term.

**Exemplu / Example 5.2**

Să se calculeze $\theta_1$ şi $v_1$ pentru grinda cu secțiunea constantă din fig.5.19 (se consideră numai efectul momentului încovoietor).

Calculate $\theta_1$ and $v_1$ for the beam with constant cross section in fig.5.19 (only the effect of the bending moment is considered).

- rotirea $\theta_1$:

- rotation $\theta_1$:

$$\overline{1} \cdot D_1 = \theta_1 = \sum \int \frac{M_p \overline{M}_1^{\theta}}{EI} dx = \frac{1}{EI_0}\left(\frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 2 \cdot \overline{1} + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot \overline{1}\right) = \frac{200}{3EI_0}$$

- săgeata $v_1$:
- deflection $v_1$:

$$\overline{1} \cdot D_1 = v_1 = \sum \int \frac{M_p \overline{M}_1^{v}}{EI} dx = \frac{1}{EI_0}\left(\frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \overline{2} + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot \overline{2}\right) = \frac{380}{3EI_0}$$

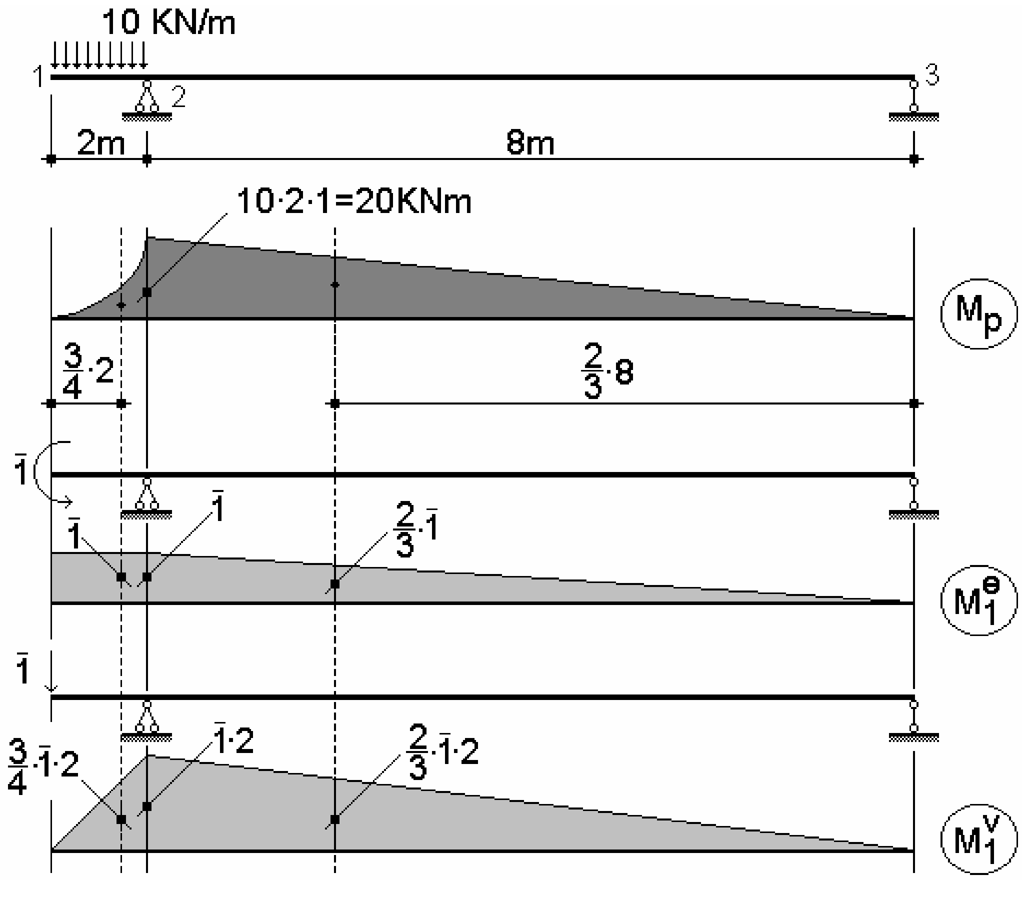



**Fig.5.19**

Numeric, pentru $EI_0 = 2.16 \times 10^5 \, kNm^2$, se obține:

Numerically, for $EI_0 = 2.16 \times 10^5 \, kNm^2$, one obtains:

$$\theta_1 = \frac{200}{3 \cdot 2.1 \cdot 10^5} = 30.864 \times 10^{-5} \, rad$$

$$v_1 = \frac{380}{3 \cdot 2.16 \cdot 10^5} = 58.642 \times 10^{-5} \, m = 0.0586 \, cm$$

**E 5.2** ✍

**Exemplu / Example 5.3**

Să se calculeze $v_2$ pentru grinda cu secțiune variabilă din fig.5.20 (se consideră numai efectul momentului încovoietor).

Calculate $v_2$ for the beam with variable cross section in fig.5.20 (only the effect of the bending moment is considered).

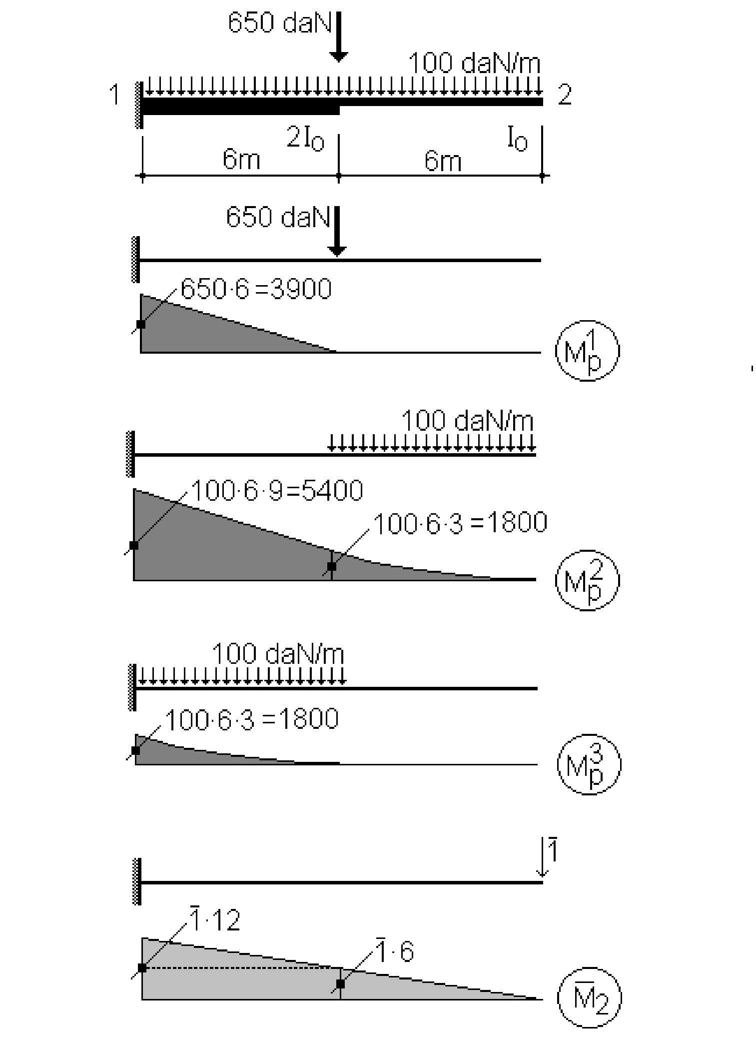



**Fig.5.20**

- săgeata $v_2$:

- deflection $v_2$:

$$\overline{1}\cdot D_2 = v_2 = \int \frac{M_p^1\overline{M}_2}{EI}dx + \int \frac{M_p^2\overline{M}_2}{EI}dx + \int \frac{M_p^3\overline{M}_2}{EI}dx =$$

$$= \frac{6}{6\cdot 2EI_o}\cdot(3900\cdot\overline{1}\cdot 12 + 2\cdot 0\cdot\overline{1}\cdot 6 + 3900\cdot\overline{1}\cdot 6 + 0\cdot\overline{1}\cdot 12) +$$

$$+\frac{1}{EI_o}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1800\cdot 6\cdot\frac{3}{4}\cdot\overline{1}\cdot 6 +$$

$$+\frac{6}{6\cdot 2EI_o}\cdot(2\cdot 5400\cdot\overline{1}\cdot 12 + 2\cdot 1800\cdot\overline{1}\cdot 6 + 5400\cdot\overline{1}\cdot 6 + 1800\cdot\overline{1}\cdot 12) +$$

$$+\frac{1}{2EI_o}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1800\cdot 6\cdot(\overline{1}\cdot 6 + \frac{3}{4}\cdot\overline{1}\cdot 6) = \frac{202500}{EI_o}$$

**E 5.3** ✍

**Exemplu / Example 5.4**

Să se calculeze $u_3$ şi $\theta_4^{(rel)}$ pentru cadrul din fig.5.21 (se consideră numai efectul momentului încovoietor).

Calculate $u_3$ and $\theta_4^{(rel)}$ for the frame in fig.5.21 (only the effect of the bending moment is considered).

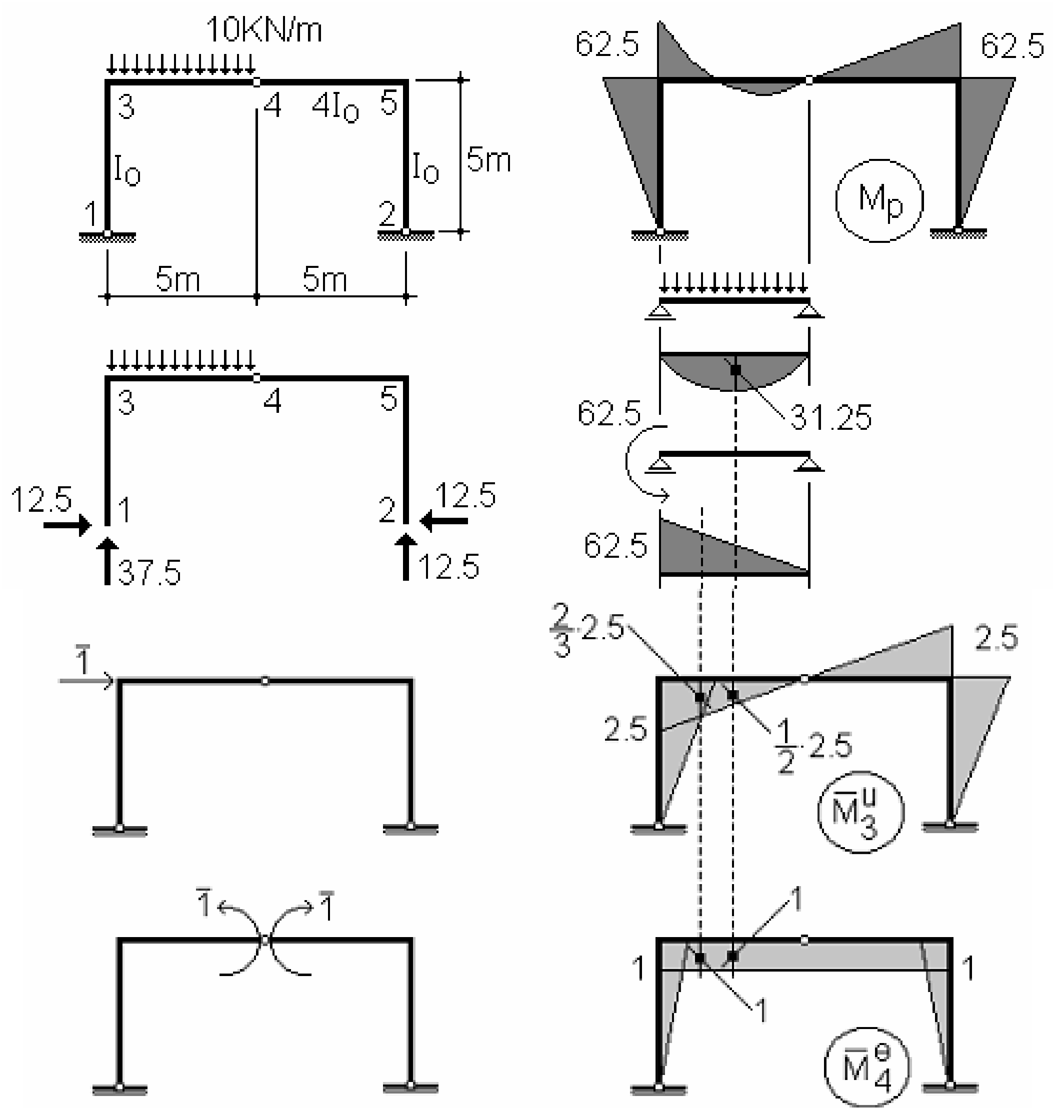



**Fig.5.21**

- săgeata $v_4$:
- deflection $v_4$:

$$\overline{1}\cdot D_3 = u_3 = \sum\int\frac{M_p\overline{M}_3^u}{EI}dx =$$

$$= -\frac{1}{EI_0}\cdot\frac{1}{2}\cdot 62.5\cdot 5\cdot\frac{2}{3}\cdot 2.5 + \frac{1}{4EI_0}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot 62.5\cdot 5\cdot\frac{2}{3}\cdot 2.5 + \frac{2}{3}\cdot 31.25\cdot 5\cdot\frac{1}{2}\cdot 2.5 + \frac{1}{2}\cdot 62.5\cdot 5\cdot\frac{2}{3}\cdot 2.5\right) -$$
$$-\frac{1}{EI_0}\cdot\frac{1}{2}\cdot 62.5\cdot 5\cdot\frac{2}{3}\cdot 2.5 = 32.55208\frac{1}{EI_0}$$

- rotirea $\theta_4$:
- rotation $\theta_4$:

$$\overline{1}\cdot D_4 = \theta_4^{(rel)} = \sum\int \frac{M_p \overline{M}_4^{\theta}}{EI}dx = -2\cdot\frac{1}{EI_0}\left(\frac{1}{2}\cdot 62.5\cdot 5\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right) +$$

$$+\frac{1}{4EI_0}\left(\frac{2}{3}\cdot 31.25\cdot 5\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 62.5\cdot 5\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 62.5\cdot 5\cdot 1\right) = -\frac{260.41666}{EI_0}$$

Semnul "minus" indică că rotirea $\theta_4^{(rel)}$ se produce în sens invers față de momentele $\overline{1}$ din starea virtuală.

The sign "minus" shows that the rotation $\theta_4^{(rel)}$ is produced in the opposite sense to the moments $\overline{1}$ in the virtual state.

Numeric, pentru $EI_0 = 2.16\times 10^5 kNm^2$, se obține:

Numerically, for $EI_0 = 2.16\times 10^5 kNm^2$, one obtains:

$$u_3 = \frac{32.55208}{2.16\cdot 10^5} = 15.07041\cdot 10^{-5} m = 0.01507041\, cm$$

$$\theta_4^{(rel)} = -\frac{260.41666}{2.16\cdot 10^5} = -120.56326\cdot 10^{-5} rad$$

**E 5.4** ✍

**Exemplu / Example 5.5**

Să se calculeze $u_2$, $v_2$ şi $\theta_2$ pentru bara curbă din fig.5.22 (se consideră efectul tuturor eforturilor).

Calculate $u_2$, $v_2$ and $\theta_2$ for the curved bar in fig.5.22 (only the effect of all the internal forces is considered).

- eforturile în secțiunea indicată din fig.5.22:

- internal forces at the section shown in fig.5.22:

$$N_p(\omega) = -P\cdot\sin\omega$$
$$Q_p(\omega) = P\cdot\cos\omega$$
$$M_p(\omega) = -P\cdot r\cdot\sin\omega$$

$$\overline{N}_2^u(\omega) = \overline{1}\cdot\cos\omega$$
$$\overline{Q}_2^u(\omega) = \overline{1}\cdot\sin\omega$$
$$\overline{M}_2^u(\omega) = -\overline{1}(r - \cdot r\cdot\cos\omega)$$

$$\overline{N}_2^v(\omega) = -\overline{1}\cdot\sin\omega$$
$$\overline{Q}_2^v(\omega) = \overline{1}\cdot\cos\omega$$
$$\overline{M}_2^v(\omega) = -\overline{1}\cdot r\cdot\sin\omega$$

$$\overline{N}_2^{\theta}(\omega) = 0$$
$$\overline{Q}_2^{\theta}(\omega) = 0$$
$$\overline{M}_2^{\theta}(\omega) = \overline{1}$$

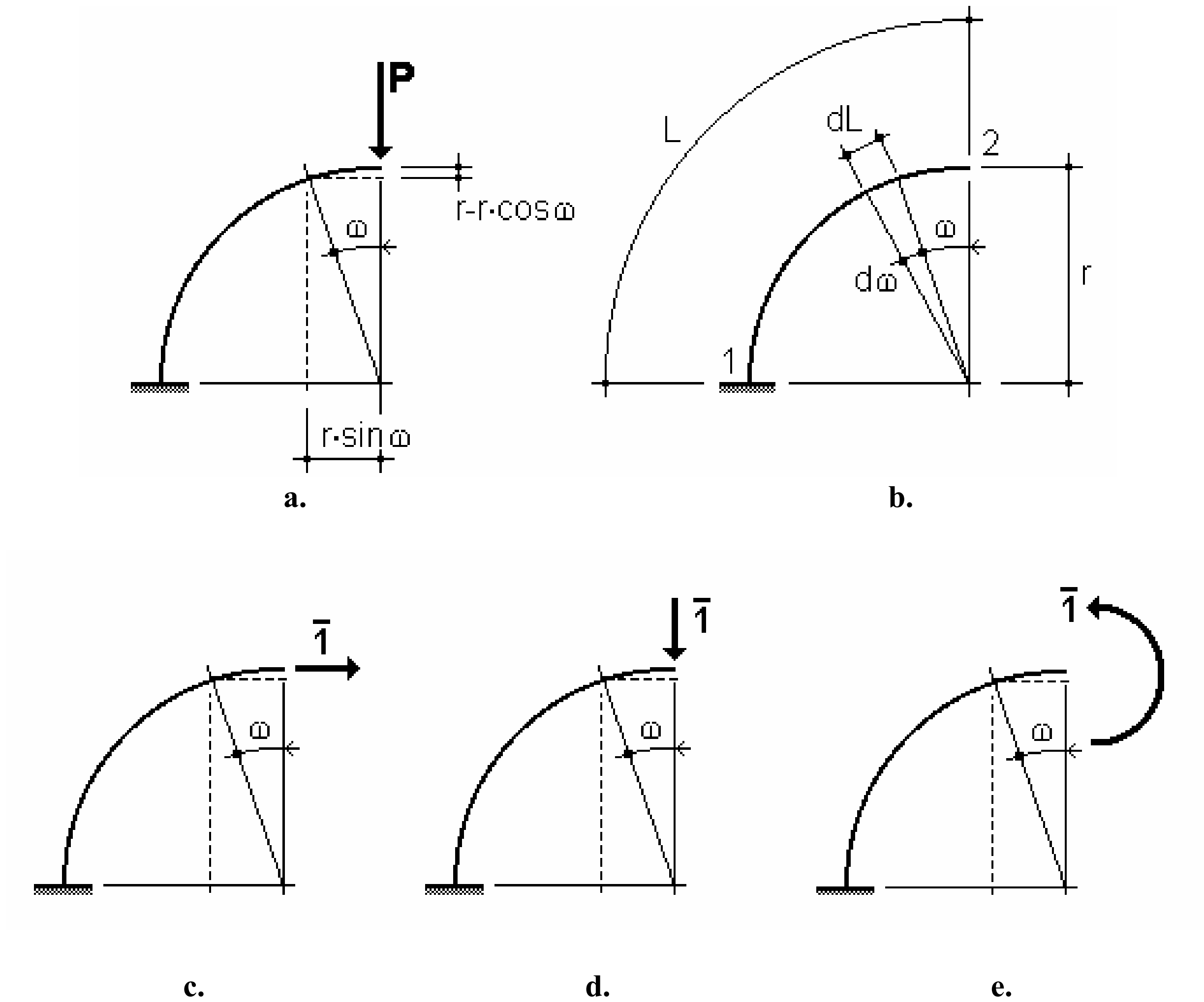



**Fig.5.22**

- săgeata $u_2$:
- deflection $u_2$:

$$\overline{1}\cdot D_2 = u_2 = \int_o^L \frac{N_p \cdot \overline{N}_2^u}{EA} ds + \int_o^L k \frac{Q_p \cdot \overline{Q}_2^u}{GA} ds + \int_o^L \frac{M_p \cdot \overline{M}_2^u}{EI} ds =$$

$$= \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{N_p \cdot \overline{N}_2^u}{EA} r \cdot d\omega + \int_o^{\frac{\pi}{2}} k \frac{Q_p \cdot \overline{Q}_2^u}{GA} r \cdot d\omega + \int_o^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_p \cdot \overline{M}_2^u}{EI} r \cdot d\omega =$$

$$= \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{EA}(-P \cdot \sin\omega) \cdot \overline{1} \cdot \cos\omega \cdot r \cdot d\omega + \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{k}{GA} P \cdot \cos\omega \cdot \overline{1} \cdot \sin\omega \cdot r \cdot d\omega +$$

$$+ \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{EI}(P \cdot r \cdot \sin\omega) \cdot \overline{1} \cdot (r - r \cdot \cos\omega) \cdot r \cdot d\omega = \frac{Pr}{2}\left(-\frac{1}{EA} + \frac{k}{GA} + \frac{r^2}{EI}\right)$$

- săgeata $v_2$:
- deflection $v_2$:

$$v_2 = \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{N_p \cdot \overline{N}_2^v}{EA} r \cdot d\omega + \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} k \frac{Q_p \cdot \overline{Q}_2^v}{GA} r \cdot d\omega + \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_p \cdot \overline{M}_2^v}{EI} r \cdot d\omega = \frac{\pi Pr}{4}\left(\frac{1}{EA} + \frac{k}{GA} + \frac{r^2}{EI}\right)$$

- rotirea $\theta_2$:
- rotation $\theta_2$:

$$\theta_2 = \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{N_p \cdot \overline{N}_2^\theta}{EA} r \cdot d\omega + \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} k \frac{Q_p \cdot \overline{Q}_2^\theta}{GA} r \cdot d\omega + \int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_p \cdot \overline{M}_2^\theta}{EI} r \cdot d\omega = -\frac{Pr^2}{EI}$$

**E 5.5** ✍

### 5.3.3 Calculul deplasărilor elastice produse de cedările de reazeme

### 5.3.3 Calculation of the elastic displacements produced by settlements

Considerând în (5.16) numai acțiunea cedărilor de reazeme, se obține:

Considering only the action of the settlements in the relationship (5.16), one obtains:

$$\overline{1} \cdot D_i = -\sum \overline{R}_k^i \cdot D_k \qquad \textbf{(5.28)}$$

unde:

$\overline{R}_k^i$ sunt reacțiunile în starea virtuală (structura încărcată cu o forță egală cu $\overline{1}$);

$D_k$ sunt cedările de reazeme din starea reală corespunzătoare reacțiunilor $\overline{R}_k^i$.

where:

$\overline{R}_k^i$ are the reactions in the virtual state (structure charged by a force equal to $\overline{1}$);

$D_k$ are the settlements in the real state corresponding to reactions $\overline{R}_k^i$.

**Exemplu / Example 5.6**

Să se calculeze deplasările elastice $d_{3-5}^{(rel)}$ şi $\theta_1$ pentru structura din fig.5.23 având cedările de reazeme $v_1$ şi $\varphi_2$ indicate în figură.

Calculate the elastic displacements $d_{3-5}^{(rel)}$ and $\theta_1$ for the structure in fig.5.23, having the settlements $v_1$ and $\varphi_2$ shown in the figure.

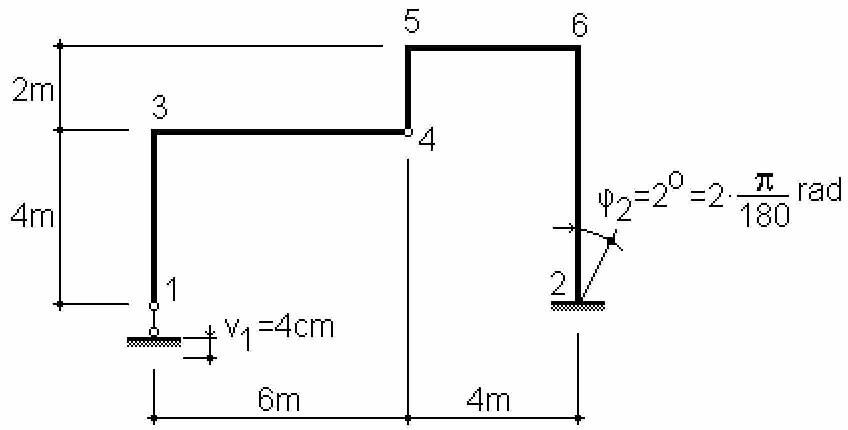



**Fig.5.23**

- deplasarea relativă $d_{3-5}^{(rel)}$:

- relative displacements $d_{3-5}^{(rel)}$:

Acţiunea în starea virtuală, fig.5.24, este o pereche de forţe $F=\overline{1}$ care dau reacţiunile $\overline{R}_k^1$ indicate în figură.

The load in the virtual state, fig.5.24, is a pair of forces $F=\overline{1}$ which produce the reactions $\overline{R}_k^1$ shown in the figure.

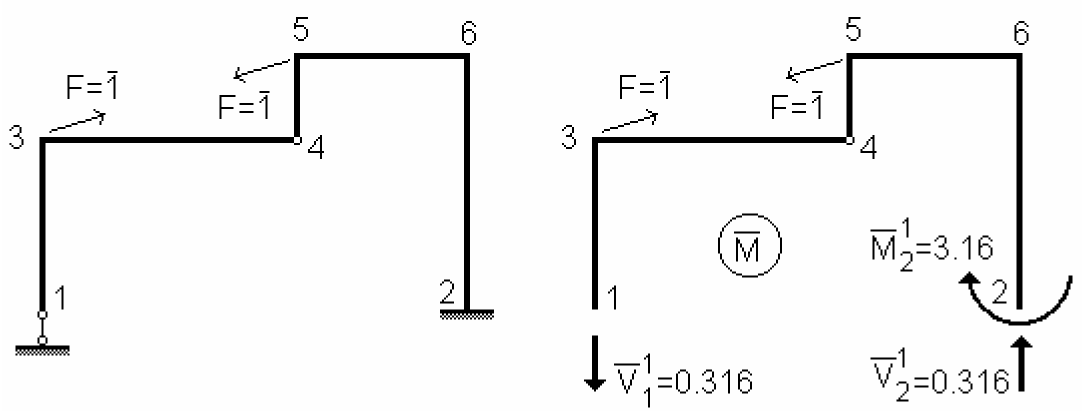



**Fig.5.24**

Aşadar:

Thus:

$$\overline{1} \cdot D_i = D_{3-5}^{(rel)} = -\sum \overline{R}_k^1 \cdot D_k = -(\overline{V}_1^1 \cdot v_1 + \overline{V}_2^1 \cdot 0 + \overline{M}_2^1 \cdot \varphi_2) =$$
$$= -(0.316 \cdot 0.04 + 3.16 \cdot 2 \cdot 3.14/180) = -0.12289\text{m} = -12.289\,\text{cm}$$

- rotirea $\theta_1$:

In fig.5.25 (starea virtuală) sunt indicate reacțiunile $\overline{R}_k^2$ produse de acțiunea virtuală M=$\overline{1}$.

- rotation $\theta_1$:

Fig.5.245 (virtual state) shows the reactions $\overline{R}_k^2$ produced by the virtual load M=$\overline{1}$.

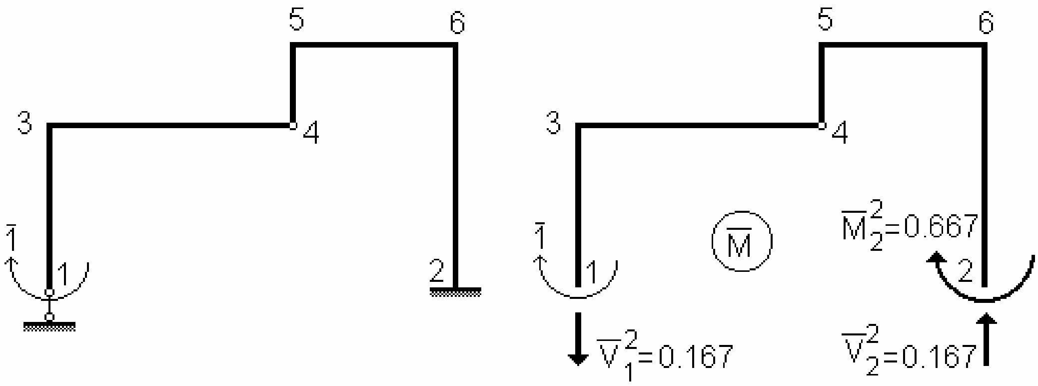



**Fig.5.25**

Aşadar:

Thus:

$$\overline{1} \cdot D_i = \theta_1 = -\sum \overline{R}_k^2 \cdot D_k = -(\overline{V}_1^2 \cdot v_1 + \overline{V}_2^2 \cdot 0 + \overline{M}_2^2 \cdot \varphi_2) =$$
$$= -(0.167 \cdot 0.04 + 0.667 \cdot 2 \cdot 3.14/180) = -0.02995\,\text{rad}$$

Deplasarea relativă $d_{3-5}^{(rel)}$ şi rotirea $\theta_1$ se produc în sens invers acțiunilor virtuale.

The relative displacement $d_{3-5}^{(rel)}$ and the rotation $\theta_1$ are produced in the opposite sense to the virtual loads.

**E 5.6** ✍

## 5.3.4 Calculul deplasărilor elastice ale structurilor cu zăbrele

## 5.3.4 Calculation of the elastic displacements for trusses

Admițând ipoteza că nodurile sunt articulate şi de asemenea ipoteza că forțele sunt aplicate în noduri, în bare există numai eforturi axiale, deci, fără cedări de reazeme, (5.16) devine:

Considering the assumption that the joints are pinned and the external loads are applied to joints, the bars will have only axial forces, thus, without settlements, the relationship (5.16) becomes :

$$\overline{1} \cdot D_i = \sum \int \frac{N_p \cdot \overline{N}_i}{EA} dx \quad (5.29)$$

In cazul în care barele au secţiunea constantă şi ţinând cont că $N_p$ şi $\overline{N}_i$ sunt constante pe fiecare bară, rezultă:

In the case when the bars have constant cross section and considering that $N_p$ and $\overline{N}_i$ are constant in each bar, it results in:

$$\int_0^L dx = L,$$

Relaţia (5.29) poate fi scrisă:

The relationship (5.29) can be written as:

$$\overline{1} \cdot D_i = \sum_1^b \frac{N_p^{mn} \cdot \overline{N}_i^{mn}}{EA_{mn}} L_{mn} \quad (5.30)$$

unde:

$N_p^{mn}$ sunt eforturile axiale produse în starea reală de acţiunea încărcărilor exterioare;

$\overline{N}_i^{mn}$ eforturile axiale produse în starea virtuală de acţiunea $\overline{1}$;

$L_{mn}$ - lungimea barelor;

$A_{mn}$ - ariile secţiunilor barelor;

E - modulul de elasticitate (acelaşi pentru toate barele);

b - numărul barelor structurii.

where:

$N_p^{mn}$ are the axial forces produced in the real state by the external loads;

$\overline{N}_i^{mn}$ the axial forces produced in the virtual state by the load $\overline{1}$;

$L_{mn}$ - length of bars;

$A_{mn}$ - areas of the cross sections of the bars;

E - modulus of elasticity (the same for all the bars);

b - number of bars in the structure.

In fig.5.26 sunt indicate acţiunile din starea virtual pentru a calcula:

a. deplasarea absolută într-un nod;

b. deplasarea relativă între două noduri;

c. rotirea absolută a unei bare;

d. rotirea relativă dintre două bare.

Fig.5.26 shows the loads in the virtual state in order to calculate:

a. absolute displacement at a joint;

b. relative displacement between two joints;

c. absolute rotation of a bar;

d. relative rotation between two bars.

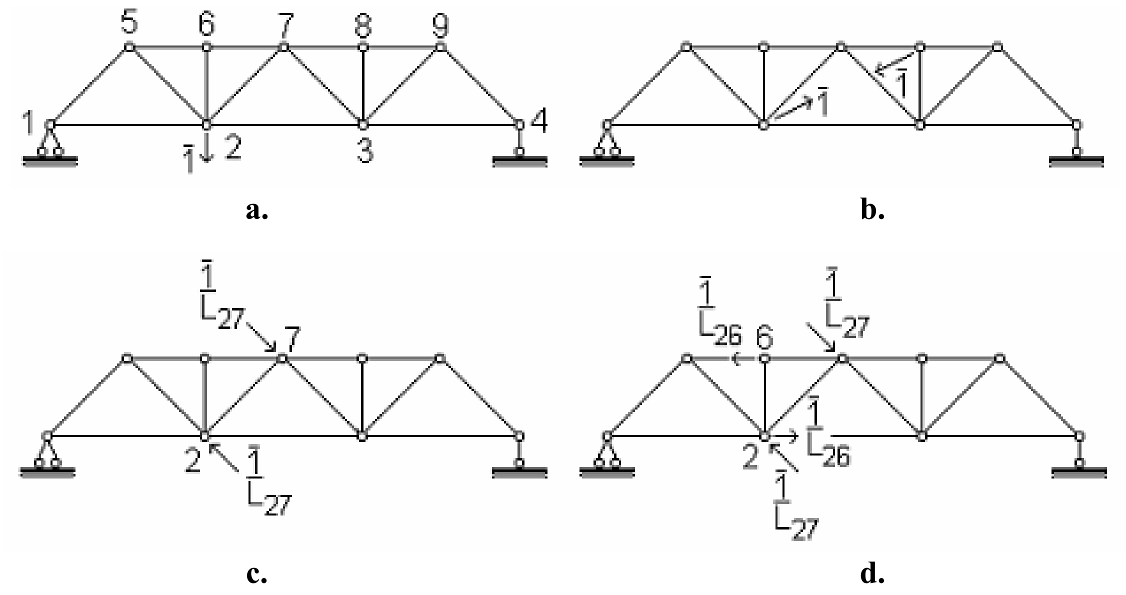



**Fig.5.26**

**Exemplu / Example 5.7**

Să se calculeze deplasările orizontale $u_3$ şi $u_5$ pentru structura din fig.5.27.

Calculate the horizontal displacements $u_3$ and $u_5$ for the structure in fig.5.27.

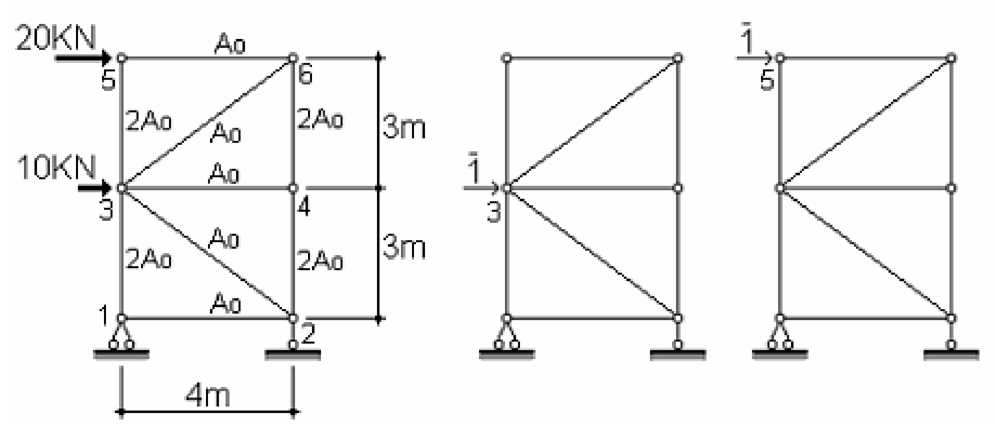



**Fig.5.27**

Rezultatele calculului sunt sistematizate în tabelul 5.1, astfel:

- coloana (3): eforturile $N_p^{mn}$ produse în starea reală, fig.5.26.a;

The results of the calculations are shown in table 5.1, as follows:

- column (3): the axial forces $N_p^{mn}$ produced in the real state, fig.5.26.a;

- coloana (4): eforturile $\overline{N}_1^{mn}$ produse în starea virtuală, fig.5.26.b (F=$\overline{1}$ în nodul 3);
- coloana (6): eforturile $\overline{N}_2^{mn}$ produse în starea virtuală, fig.5.26.c (F=$\overline{1}$ în nodul 5).

Utilizând relația (5.30), se calculează termenii coloanelor (5) şi respectiv (7), se face suma acestor termeni şi, în final, se obține:

- column (4): axial forces $\overline{N}_1^{mn}$ produced in the virtual state, fig.5.26.b (F=$\overline{1}$ at joint 3);
- column (6): axial forces $\overline{N}_2^{mn}$ produced in the virtual state, fig.5.26.c (F=$\overline{1}$ at joint 5).

Using the relationship (5.30), the terms in columns (5) and (7) are calculated, they are summed up, finally obtaining:

$$\overline{1} \cdot D_i = u_3 = \frac{1}{E}\sum_1^9 \frac{N_p^{mn} \cdot \overline{N}_1^{mn}}{A_{mn}} L_{mn} = \frac{396.5625}{EA_o}$$

$$\overline{1} \cdot D_i = u_5 = \frac{1}{E}\sum_1^9 \frac{N_p^{mn} \cdot \overline{N}_2^{mn}}{A_{mn}} L_{mn} = \frac{708.7500}{EA_o}$$

Numeric, pentru:

Numerically, for:

$$E = 3 \cdot 10^5 \, daN/cm^2 = 3 \cdot 10^7 \, KN/m^2 \qquad A_0 = 900 \, cm^2 = 0.09 \, m^2$$

Se obține:

One obtains:

$$u_3 = 0.0147 \, cm \qquad u_5 = 0.0262 \, cm$$

**TAB.5.1**

| BAR. | L | A | Np | N1 | NpN1L / A | N2 | NpN2L / A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1-3 | 3 | 2Ao | 37.5 | 0.75 | 42.1875/Ao | 1.5 | 84.375/Ao |
| 3-5 | 3 | 2Ao | 22.5 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2-4 | 3 | 2Ao | - 15.0 | 0 | 0 | - 0.75 | 16.875/Ao |
| 4-6 | 3 | 2Ao | - 15.0 | 0 | 0 | - 0.75 | 0 |
| 1-2 | 4 | Ao | 30.0 | 1.00 | 120.0000/Ao | 1.00 | 120.000/Ao |
| 3-4 | 4 | Ao | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5-6 | 4 | Ao | - 20.0 | 0 | 0 | -1.00 | 80.000/Ao |
| 2-3 | 5 | Ao | - 37.5 | - 1.25 | 234.3750/Ao | -1.25 | 234.375/Ao |
| 3-6 | 5 | Ao | 25.0 | 0 | 0 | 1.25 | 156.250/Ao |
| | | | | $d_3 = \Sigma$ | 396.5625/Ao | $d_5 = \Sigma$ | 708.750/Ao |

**E 5.7** ✍

## 5.3.5 Calculul deplasărilor elastice datorate variațiilor de temperatură

Vom considera două stări de acțiuni şi deplasări:

**a.** starea reală: structura supusă la o variație neuniformă de temperatură pentru care se calculează deplasarea elastică $D_{it}$ (deplasare liniară sau rotire), fig.5.28;

**b.** starea virtuală: structura încărcată cu acțiunea $\overline{1}$ corespunzătoare deplasării $D_i$ din starea reală, unde există eforturile $\overline{N}_i$ şi $\overline{M}_i$.

Vom considera un element de lungime infinit mică "dx", fig.5.28, detaşat dintr-o bară cu secțiunea transversală simetrică şi înălțimea **h**. Se notează cu $\alpha_t$ coeficientul de dilatare termică liniară şi se consideră că $t_1 > t_2$. In aceste condiții există două tipuri de deformații:

## 5.3.5 Claculation of the elastic displacements due to changes in temperature

Consider two states of loads and displacements:

**a.** real state: the structure subjected to a nonuniform change in temperature for which the elatic displacement $D_{it}$ (deflection or rotation) will be calculated, fig.5.28;

**b.** virtual state: the structure subjected to the load $\overline{1}$ corresponding to the displacement $D_i$ in the real state, where the internal forces $\overline{N}_i$ and $\overline{M}_i$ occur.

Consider an infinitisimally small element "dx", fig.5.28, detached from a bar with symmetric cross section and the depth **h**. The coefficient of linear thermal expansion is denoted by $\alpha_t$ and it is considered that $t_1 > t_2$. In this case, there are two types of deformations:

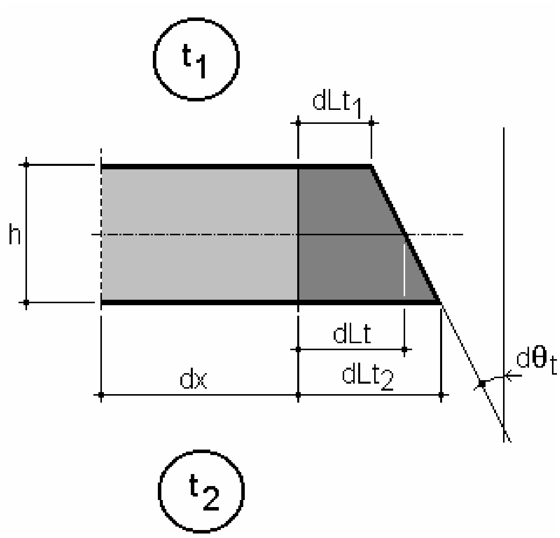



**Fig.5.28**

**Element infinit mic supus unei variații de temperatură.**

**Infinitisimally small element subjected to chages in temperature.**

- o deformație axială:

- an axial deformation:

$$\mathbf{dLt} = \frac{\mathbf{dLt_1 + dLt_2}}{\mathbf{2}} = \frac{\alpha_t \cdot \mathbf{t_1} \cdot \mathbf{dx} + \alpha_t \cdot \mathbf{t_2} \cdot \mathbf{dx}}{2} \quad \mathbf{(5.31)}$$

sau:

or:

$$\mathbf{dLt} = \alpha_t \frac{\mathbf{t_1 + t_2}}{\mathbf{2}} \mathbf{dx} = \alpha_t \mathbf{t_m dx} \quad \mathbf{(5.31')}$$

unde:

where:

$$\mathbf{t_m} = \frac{\mathbf{t_1 + t_2}}{\mathbf{2}} \quad \mathbf{(5.32)}$$

este temperatura medie.

is the average temperature.

- o rotație a secțiunii:

- one rotation of the section:

$$\mathbf{d}\theta_t = \frac{\mathbf{dLt_1 - dLt_2}}{\mathbf{h}} = \frac{\alpha_t \cdot \mathbf{t_1} \cdot \mathbf{dx} - \alpha_t \cdot \mathbf{t_2} \cdot \mathbf{dx}}{\mathbf{h}} \quad \mathbf{(5.33)}$$

sau:

or:

$$\mathbf{d}\theta_t = \alpha_t \frac{\mathbf{t_1 - t_2}}{\mathbf{h}} \mathbf{dx} = \frac{\alpha_t \cdot \Delta_t}{\mathbf{h}} \quad \mathbf{(5.33')}$$

unde:

where:

$$\Delta_t = \mathbf{t_1 - t_2} \quad \mathbf{(5.34)}$$

este diferența de temperatură.

is the difference in temperature.

Se poate scrie egalitatea dintre lucrul mecanic exterior şi lucrul mecanic interior, fiecare dintre ele cu acțiunile (eforturile) stării virtuale şi deplasările (deformațiile) stării reale ($W^e_{v,r} = W^i_{v,r}$):

The identity between the external and internal work can be written, each of them with the loads (internal forces) in the virtual state and displacements (deformations) in the real state ($W^e_{v,r} = W^i_{v,r}$):

$$\overline{\mathbf{1}} \cdot \mathbf{D_{it}} = \sum \int \overline{\mathbf{N}}_i \cdot \mathbf{dLt} + \sum \int \overline{\mathbf{M}}_i \cdot \mathbf{d}\theta \mathbf{t} \quad \mathbf{(5.35)}$$

unde, înlocuind (5.31') şi (5.33'), rezultă:

where, by substituting (5.31') and (5.33'), it results:

$$\overline{1} \cdot D_{it} = \sum \int \overline{N}_i \cdot \alpha_t \cdot t_m \cdot dx + \sum \int \overline{M}_i \cdot \frac{\alpha_t \cdot \Delta_t}{h} dx \qquad (5.36)$$

In cazul în care $\alpha_t$, $t_m$, $\Delta_t$ şi $h$ sunt constante pe anumite zone (bare), (5.36) devine:

In the case when $\alpha_t$, $t_m$, $\Delta_t$ and $h$ are constant over certain regions (bars), (5.36) becomes:

$$\overline{1} \cdot D_{it} = \sum \alpha_t \cdot t_m \int_0^L \overline{N}_i \cdot dx + \sum \frac{\alpha_t \cdot \Delta_t}{h} \int_0^L \overline{M}_i \cdot dx = \\ = \sum \pm \alpha_t \cdot t_m^k \cdot A_{\overline{N}_i}^k + \sum \pm \frac{\alpha_t \cdot \Delta_t^k}{h_k} \cdot A_{\overline{M}_i}^k \qquad (5.37)$$

unde:

$t_m^k$ este variaţia medie de temperatură pe zona (bară) "k";

$\Delta_t^k$ - diferenţa variaţiilor de temperatură pe zona (bara) "k";

$h_k$ - înălţimea secţiunii transversale pe zona (bara) "k";

$A_{\overline{N}_i}^k$ - aria diagramei $\overline{N}_i$ pe zona (bara) "k";

$A_{\overline{M}_i}^k$ - aria diagramei $\overline{M}_i$ pe zona (bara) "k".

where:

$t_m^k$ is the average change in temperature over the region (bar) "k";

$\Delta_t^k$ - the difference of the changes in temperature over the region (bar) "k";

$h_k$ - the depth of the cross section over the region (bar) "k";

$A_{\overline{N}_i}^k$ - the area of the diagram $\overline{N}_i$ over the region (bar) "k";

$A_{\overline{M}_i}^k$ - the area of the diagram $\overline{M}_i$ over the region (bar) "k".

**Observaţii:**

- Semnul ± depinde de sensul relativ dintre deformaţiile produse de variaţia de temperatură din starea reală şi eforturile $\overline{N}_i$, $\overline{M}_i$ ale stării virtuale.
- In cazul în care variaţia de temperatură este uniformă, $t_1 = t_2$, deci $\Delta_t = 0$ iar în relaţia (5.37) rămân numai termenii de primul tip.

**Note**:

- The sign ± depends on the relative sense between the deformations produced by the temperature change in the real state and the internal forces $\overline{N}_i$, $\overline{M}_i$ in the virtual state.
- In the case when there is a uniform change in temperature, $t_1 = t_2$, thus $\Delta_t = 0$ and the relationship (5.37) includes only the first order terms.

- Pentru secțiuni nesimetrice, fig.5.29, $t_m$ se înlocuieşte cu:

- For nonymmetric cross-sections, fig.5.29, $t_m$ is replaced by:

$$\mathbf{t_p = \frac{t_1 \cdot h_2 + t_2 \cdot h_1}{h}} \qquad \textbf{(5.38)}$$

- Contracția betonului poate fi asimilată cu o variație uniformă de temperatură de circa -15°.

- The concrete contraction can be considered as a uniform change in temperature of about -15°.

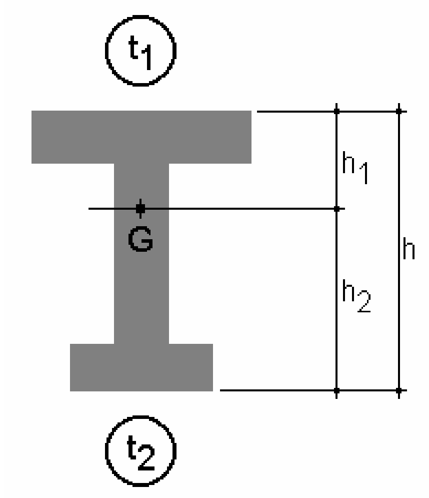



**Fig.5.29**

**Secțiune transversală nesimetrică ($t_p$).** **Nonsymmetric cross section ($t_p$).**

**Exemplu / Example 5.8**

Să se calculeze deplasarea orizontală $u_4$ pentru cadrul din fig.5.30, considerând aceleaşi caracteristici secționale pentru toate barele.

Calculate the horizontal displacement $u_4$ for the frame in fig.5.30, considering the same cross section characteristics for all the bars.

Pentru starea virtuală se obțin diagramele $\overline{N}$, $\overline{M}$ din fig.5.31.

For the virtual state, the $\overline{N}$, $\overline{M}$ diagrams shown in fig.5.31 are obtained.

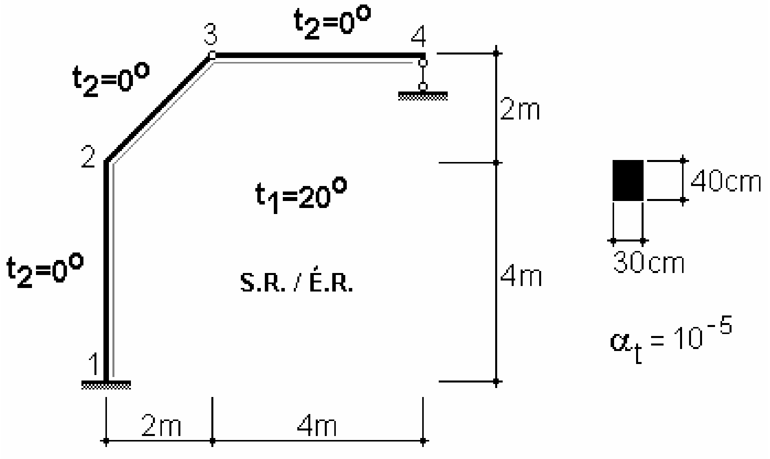



**Fig.5.30**

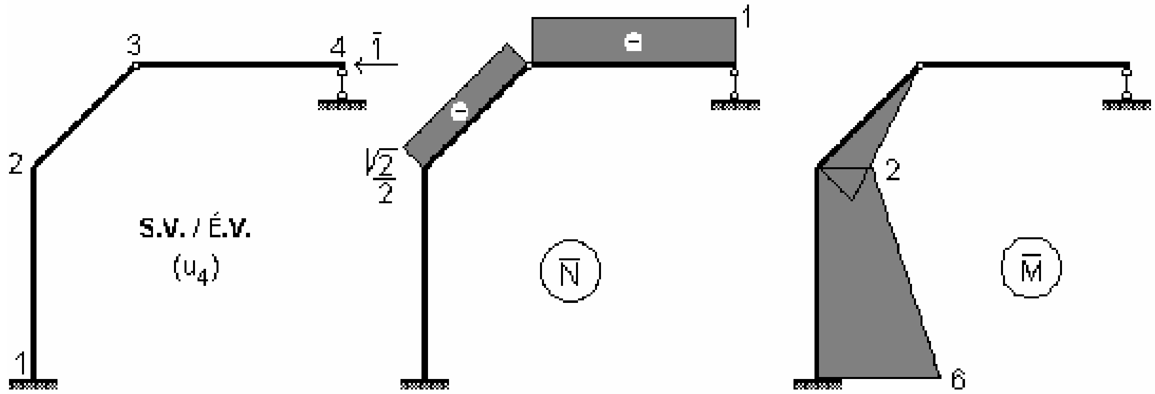



**Fig.5.31**

Pentru toate barele :

For all the bars:

$$t_m = \frac{t_1 + t_2}{2} = 10^o;\ \ \Delta_t = t_1 - t_2 = 20^o;\ \ h = 0.4\,m$$

Deci, cu (5.37) şi ţinând cont de semnele lucrului mecanic virtual, rezultă:

Thus, with (5.37) and taking into account the signs of the virtual work, one obtains:

$$\overline{1} \cdot D_4 = u_4 = -10^{-5} \cdot 10 \cdot \left(1 \cdot 400 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 200 \cdot \sqrt{2}\right) +$$

$$+10^{-5} \cdot \frac{20}{40} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 200 \cdot \sqrt{2} + \frac{200 + 600}{2} \cdot 400\right) = 0.88142\,cm$$

Deci reazemul 4 se deplasează spre stânga.

Thus the support 4 moves to the left.

**E 5.8** ✍

Editura Societatii Academice „Matei-Teiu Botez” IASI

ISBN 973-7962-29-X

Colectia: ANALIZA STATICA SI DINAMICA